

2014

Kockázatalapú szabályozókártyák kialakítása

oktatási segédlet a megbízhatóság és kockázatmenedzsment című tantárgyhoz



Impresszum

Készítették:

Dr. habil Kosztyán Zsolt Tibor, Katona Attila

Lektorálta:

Dr. Hegedűs Csaba

Támogatta:

A segédlet az Európai Unió és Magyarország támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. Bizonytalanságanalízis.....	4
1.1. Alapfogalmak.....	4
2. Minőségkötségek	6
2.1. A minőségkötségek strukturalása:	6
2.2. A kötségek alakulása:.....	7
3. A mérési bizonytalanság figyelembe vétele.....	7
3.1. Mindendarabos eset.....	9
3.1.1. Döntési hibák, minőségkötségek	10
3.1.2. Szimulációs módszerek.....	16
3.1.3. Esetpélda - A mérési bizonytalanság figyelembe vételének gyakorlati alkalmazása.....	20
2.2. Mintavételes eset.....	22
2.3. Előrejelzés.....	25
4. Kártyaillesztés lépései stationer, termelési folyamatokra	28
4.1. 1. Lépés: A technológiai folyamat és az ellenőrzés tulajdonságainak összegyűjtése	29
4.2. 2. Lépés: mérési és minősítési ellenőrző kártyák közötti döntés.....	29
4.3. 3. Lépés: bemenő paraméterek és korlátozó tényezők meghatározása az egyes kártyák esetében.....	30
4.4. 4. Lépés: az eddigi információk figyelembe vételével a megfelelő kártya (kártyák) kiválasztása.....	30
4.5. 5. Lépés: Állandó és változó paraméterek megválasztása	31
4.6. 6. Lépés: a döntéshez társítható költség-, bevétel, és fedezeti értékek meghatározása.....	31
4.7. 7. Lépés: A beavatkozási határok módosítása a mérési bizonytalanság figyelembevételével.....	31
4.8. Esetpélda – patronhüvely gyártása.....	32
5. Kártyaillesztés karbantartási folyamatokra	33
5.1. Több jellemző egyidejű vizsgálata	33
5.2. Trendhatás kiszűrésének bemutatása egy vállalati példán keresztül.....	35
6. Összefoglalás.....	38
7. Köszönetnyilvánítás	38
8. Felhasznált irodalom.....	38

Bevezetés

Látszólag két különálló elmélet foglalkozik a méréssel, megfelelőséggel. A hagyományos folyamatszabályozási eszközöket a gyártásban alkalmazzák.[1] A gyártási folyamat szabályozása során egy terméket egy adott paraméter szerint minősítenek megfelelőnek vagy nem megfelelőnek, attól függően, hogy egy előírt határértéken belül van, vagy esetleg azt meghaladja. A módszer nagy hiányossága, hogy magát a mérést egy mérőműszerrel végzik, melynek, ha tudjuk is jellemezni a mérési bizonytalanságát (hiszen ezeket adott rendszerességgel kalibrálják) nem veszik őket figyelembe a döntéshozatal során. Pedig magára a mérési bizonytalanság kezelésére, annak feltérképezésére létezik 1993-óta ajánlás. Ezt a módszert jelenleg csak laboratóriumi körülmények között alkalmazzák. [2].

A mérési bizonytalanság figyelembe vétele mellett döntéseink során a lehetséges döntési alternatívák következményeit, melyeket általában költségekben fejezhetünk ki, ugyanúgy figyelembe kell vennünk. Különösen fontosak e döntések olyan termelési és karbantartási problémák esetén, ahol döntéseinket egy beavatkozási határ közelében kell meghoznunk. Tovább engedjünk-e egy terméket, vagy leselejtezzük? Használjunk tovább egy berendezést, vagy a termelést leállítva karbantartsunk.

Az oktatási segédlet megszerkesztésénél az volt a cél, hogy a megbízhatóság alapú szabályozó kártyák kialakításának ismeretére építve olyan módszereket mutassunk be, amellyel az olvasó képes lehet a döntési következményeket is figyelembe véve kockázatalapú kártyák kialakítására is.

A segédlet a megbízhatóság és kockázatmenedzsment c. tantárgyhoz készült. Az előadáson elhangzott bizonytalanságanalízis és a kockázatalapú kártyák kialakítása c. előadás anyagát egészíti ki.

1. Bizonytalanságanalízis

Ezt a módszert elsősorban laboratóriumi vizsgálatok során alkalmazták, de látható lesz, hogy lehetőség van e módszer használatára termelési és karbantartási döntések során is.

1.1. Alapfogalmak

A JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) ajánlása [3] három fő bizonytalanságot definiál. Feltételezi, hogy a mérendő mennyiség kifejezhető egy modellfüggvény segítségével (például egy elektromos vezető ellenállása kifejezhető a hossz és a fajlagos ellenállás szorzataként). E függvény paramétereinek mérésekből adódó szóródását és a szisztematikus hibáját nevezzük standard bizonytalanságnak (standard uncertainty).

Ha mérések segítségével meg lehet határozni a standard bizonytalanságot, akkor A-típusú standard bizonytalanságról, ha nem (pl. specifikált, nem mérhető, vagy nem statisztizálható), akkor B-típusú standard bizonytalanságról beszélünk. Ha a standard bizonytalanságok ismertek, vagy meg lehet azokat határozni, akkor (a JCGM ajánlása szerint) analitikusan, vagy Monte Carlo szimulációval meg lehet határozni a mérendő mennyiség (pl. itt az ellenállás) eredő standard bizonytalanságát (combined standard uncertainty), melyet u_c -vel jelölünk. A mérési bizonytalanságok definíciói az JCGM ajánlásai szerint (hiteles Országos Mérésügyi Hivatal által készített fordításban).

„**Definíció:** A *standard bizonytalanság* egy mérés eredményének bizonytalansága szórásként kifejezve.”

Példa: Az A-típusú standard bizonytalanság kiszámítása: $x_i = \bar{X}_i$ esetén

$$u(x_i) = s(X_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{k,i} - \bar{X}_i)^2}, \text{ ahol } x_i \text{ az } i\text{-edik paraméter } n \text{ db mért értékeinek átlaga,}$$

$X_{k,i}$ az i -edik paraméter k -adik mért értéke.

„**Definíció:** Az *eredő standard bizonytalanság* egy mérés eredményének standard bizonytalansága, ha ez az eredmény egy vagy több más mennyiség értékéből van előállítva, olyan tagok összegének pozitív négyzetgyökével egyenlő, amelyek ezeknek a más mennyiségeknek a becsült varianciái és kovarianciái, annak megfelelően, hogy hogyan változik a mérés eredménye a mennyiségek változásainak hatására.”

Kiszámítása: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ esetén

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) r(x_i, x_j), \text{ ahol}$$

$r(x_i, x_j)$ x_i és x_j mért értékek közötti korreláció.

Ha az eloszlás sűrűségfüggvénye helyett egy számmal szeretnénk jellemezni az eredő bizonytalanságot, akkor ezt különböző eloszlásokra tehetjük. Pl. $N(0, \sigma)$ normális eloszlást követő eredő standard bizonytalanság esetén u_c jellemezhető σ -val. Az JCGM ajánlásában egy harmadik bizonytalansági fogalommal is találkozhatunk. Ez pedig a kiterjesztett bizonytalanság. A kiterjesztett bizonytalanság egy $U = k u_c$ intervallummal jellemezhető. k értéke függ a mérés számától, a standard bizonytalanság típusától (A, vagy B), és az eredő standard bizonytalanság eloszlásától.

„**Definíció:** A kiterjesztett bizonytalanság a mérési eredmény körüli olyan tartományt meghatározó mennyiség, amelytől elvárható, hogy a mérendő mennyiségek ésszerűen tulajdonítható értékek eloszlásának egy nagy hányadát magába foglalva.”

Megjegyzések: 1. A hányad megbízhatósági valószínűségnek, vagy tartomány megbízhatósági szintjének tekinthető. 2. A kiterjesztett bizonytalansággal meghatározott tartománynak adott megbízhatósági szinttel való összekapcsolása azt igényli, hogy explicit és implicit feltevésekkel rendelkezünk a mérési eredmény és annak eredő standard bizonytalansága által jellemzett valószínűség-eloszlásra vonatkozóan. Az ehhez a tartományhoz rendelhető megbízhatósági szint csak olyan mértékben lehet ismert, amilyen mértékig az ilyen jellegű feltevések indokoltak.”

Egy kalibrálás során azt tudjuk mondani, hogy egy alkatrész (pl. itt az ellenállás) mért értéke: $x \pm U$. (pl. $12,04 \text{ k}\Omega \pm 102 \text{ }\Omega$). Különböző műszerekre kalibrálásokat nemcsak a szabványosító szervezetek, hanem a nagyobb cégek mérőberendezéseinél is végeznek. Igaz az utóbbi esetben sokszor nincsenek teljesen tisztában a mérési bizonytalanság pontos meghatározásának metodikájával. Jelen segédletben nekünk sem célunk ennek a módszertannak a részletes ismertetése. Szükséges azonban rámutatni, hogy az eredő standard mérési bizonytalanság

(továbbiakban csak mérési bizonytalanság) ismerete olyan a priori információ, melyet nem csak a mérés „jósa” miatt célszerű meghatározni, hanem ennek figyelembevételével a termelés, karbantartás során meghozott döntések összköltsége is csökkenthető.

A *kockázat* a döntés kockázatát jelenti, azaz a (vezetői) döntés miatt bekövetkező esemény valószínűségével súlyozott (általában költség) hatást.

A következő fejezetben a döntés során felmerülő költségeket csoportosítjuk.

2. Minőségköltségek

A minőségmenedzsment célja a lehető legmagasabb színvonalú termékminőség elérése, a lehető legalacsonyabb költségek mellett. A megfelelő termék-, és szolgáltatásminőség együtt jár a megfelelő termék-, és szolgáltatásköltségekkel.

Feigenbaum szerint [4]: „A nem megfelelő minőség egyben nem megfelelő erőforrás felhasználást is jelent. Ez pedig maga után vonja az anyagpazarlást, a munkaerőpazarlást és a berendezésidő pazarlását is és következésképpen magasabb költségekhez vezet. Ezzel szemben a megfelelő minőség megfelelő erőforrás hasznosítást és így alacsonyabb költségeket jelent.”

2.1. A minőségköltségek strukturálása:

Az egyik széles körben elfogadott megkülönböztetés a Feigenbaum által meghatározott PAF-modell. Eszerint a minőségköltségeket a következőképpen csoportosíthatjuk:

- megelőzési költségek
- minősítési költségek
- hibaköltségek

A megelőzési költségek a hibák és a nemmegfelelőségek előfordulásának elkerülésére tett erőfeszítésekből származnak és tartalmazzák azokat a kiadásokat is, amelyek azon termékek előállításának a megelőzéséből fakadnak, amelyek nem teljesítik a minőségkövetelményeket.

A minősítési költségek magukba foglalják mindazon költségeket, amelyek a vállalat minőségszínvonalának megtartásához kapcsolódnak (ellenőrzés, vizsgálat, külső jóváhagyás, minőség-felülvizsgálat).

A hibaköltségek azok a költségek, melyek az egyes minőségi követelmények nem teljesülésekor keletkeznek. A modell megkülönböztet belső és külső hibaköltségeket. A belső hibaköltségek jelentik az üzemben belül jelentkező, nem kielégítő minőség költségeit. Nagyobb kárt okozhatnak azonban a külső hibaköltségek, melyek a vállalaton kívül észlelt nemmegfelelőség hibaköltségei. Ebben az esetben a vevők akár el is pártolhatnak, ami komoly károkat jelenthet a vállalat számára[5].

Egy másik strukturálási mód (Process-Cost Modell) a minőségköltségeket két csoportra bontja, a megfelelés költségeire (cost of conformance: COC) és a nemmegfelelés költségeire (cost of non-conformance: CONC).

A megfelelés költségei alatt azokat a költségeket értjük, melyek azon folyamatok kapcsán merülnek fel, amelyek biztosítják, hogy az előállított termék eleget tegyen az előírt minőségi követelményeknek. A nemmegfelelés költségei pedig azokkal a hibákkal járó költségek, amelyek miatt a gyártási folyamat nem tud az előírásoknak megfelelően működni. A teljes minőségköltséget e kettő komponens összege adja, vagyis $COQ = COC + CONC$. A gyakorlatban a vállalatok általában a hangsúlyt a nemmegfelelés költségeinek vizsgálatára helyezik.

2.2. A költségek alakulása:

Az alábbiakban vizsgáljuk meg, hogy hogyan alakulnak az egyes költségek bizonyos esetekben.

Tegyük fel, hogy célul tűzzük ki egy adott termék, illetve gyártási folyamat minőségi szintjének növelését. Ez esetben a hibaköltség nyilván csökkenni fog, hiszen kevesebb selejtes termék fog keletkezni. ezzel szemben a megelőzésre és ellenőrzésre fordított kiadásaink növekedni fognak. Az ellenőrzésbe és megelőzésbe történő beruházott összeg időben nem állandó, hanem csökkenő mértékben redukálja a hibaköltségeket. Így az összes minőségköltség egy bizonyos pontig csökken, majd ez után a pont után a további beruházások már nem fogják csökkenteni az eredő költséget [6].

Ezért döntéseinket is úgy kell meghoznunk, hogy a költségek alakulását is figyelembe vegyük. A döntéshozatal azonban sok más területre is kiterjed, és a sikeresség elérésekor kulcsszerepet játszik.

3. A mérési bizonytalanság figyelembe vétele

A mérési bizonytalanság miatt négy esetet különböztetünk meg a tényleges megfelelés és a meghozott döntés kombinációjaként (1. táblázat).

Meg kell különböztetnünk a következő alkalmazási eseteket.

1. Mindendarabos mérés
2. Mintavételes mérés
 - a. Alkalmazás stacioner folyamatok esetén (termelési folyamatok optimalálása)
 - b. Alkalmazás kvázi stacioner folyamatok esetén (karbantartási folyamatok optimalálása)
3. Előrejelzés

Az első esetben minden darabra külön mérést végzünk. Ekkor beavatkozási határok helyett specifikációs határokról beszélünk. Akkor tekintjük megfelelőnek a terméket, ha a méréseink alapján a specifikációs határt a mért jellemző betartja. Ezzel a feladattal részletesebben a következő alfejezetben foglalkozunk részletesen.

Maga a mérés, roncsolással is járhat, illetve jelentős költség és időigénye is lehet, így nagyon gyakran mintavétel alapján döntünk arról, hogy beavatkozzunk-e a folyamatba.

Termelési folyamatok esetén feltételezzük, hogy ún. stacioner folyamatokat kell szabályoznunk. Feltesszük, hogy a folyamatban nincs trend (és ezt a vizsgált jellemzőktől is elvárjuk). A mérési eredmények varianciája és autokorrelációja állandó.

Karbantartási folyamatok esetén, ahol sokszor kopási jellemzőket mérünk ez a feltételezés nem tartható, így ott nem is beszélhetünk stationer, hanem sokszor csak stationerré alakítható, ún. kvázistacioner folyamatokról. Az előző esethez képest itt már a folyamat trendjét is jellemeznünk kell. Magát az idősort pedig ettől megszabadítva dekomponálnunk is szükséges.

Karbantartási folyamatoknál a beavatkozás azt jelenti, hogy vagy kicseréljük a berendezést, vagy annak egy alkatrészét, vagy azon karbantartást végzünk.

A túl korai csere, vagy karbantartás elmaradt hasznot, míg az időben el nem végzett karbantartás, a termelés leállása miatt, extra költséget eredményezhet, illetve okozhat ún. függő meghibásodásokat, vagyis amikor egyik berendezés meghibásodása egy másik berendezés meghibásodásához vezet.

Előrejelzés esetén megpróbáljuk a folyamatokat előrejelezni. A beavatkozási határoknál pedig figyelembe venni a mérési bizonytalanságot és a beavatkozás során hozható hibás döntések költségét is.

Ha nincs beavatkozásra szükség, de a mért érték ennek ellenkezőjét mutatja, akkor fölöslegesen avatkozunk be egy termelési, vagy egy karbantartási folyamatba és így elsőfajú hibát vétünk. Ha a vizsgált jellemző valójában nemmegfelelő, de ezt a mérési hiba miatt nem vesszük észre, és nem avatkozunk be), akkor másodfajú hibát vétünk. Döntésünk akkor helyes, ha beavatkozunk a nemmegfelelő folyamatba vagy hagyjuk tovább futni a jó folyamatot. 1. táblázat: fedezetek alakulása a döntés és a tényállapot függvényében.

1. táblázat: döntési mátrix

Fedezet	Döntés	
	Nem történt Karbantartás/beavatkozás (1)	Karbantartás/beavatkozás történt (0)
Nem szükséges karbantartás/beavatkozás (1)	$\pi_{11} = r_{11} - c_{11}$ Helyes elfogadás	$\pi_{10} = r_{10} - c_{10}$ Felesleges beavatkozás
Karbantartás/beavatkozás szükséges (0)	$\pi_{01} = r_{01} - c_{01}$ Helytelen elfogadás	$\pi_{00} = r_{00} - c_{00}$ Helyes beavatkozás

A négy esethez c_{ij} költségeket rendelhetünk, melyek a mérések elvégzésétől, a termék és szolgáltatás létrehozásából és a meghozott döntés alapján végrehajtott cselekvésektől függenek. Azért, hogy az alternatívák választásakor elmaradt hasznokkal is számolni tudjunk a c_{ij} költségek mellett, az egyes esetek r_{ij} bevételeit is számba vehetjük. Így a bevételek és költségek különbségeként megjelenő $\pi_{ij} = r_{ij} - c_{ij}$ fedezettel számolunk. Nem feltétlenül lesz a négy esetre négy különböző költségünk, az előállítás és a mérés költsége minden esetben jelen van, hisz ez megelőzi a döntést. A selejtezés vagy a további felhasználás, értékesítés költsége már a döntés következménye. Ahogy azt majd a későbbiekben bemutatom, az adott tényállapothoz tartozó helyes és helytelen cselekvésekhez tartozó kimenetek fedezetkülönbsége, illetve ezek aránya lesz az optimális döntési szabály kialakításánál mérvadó.

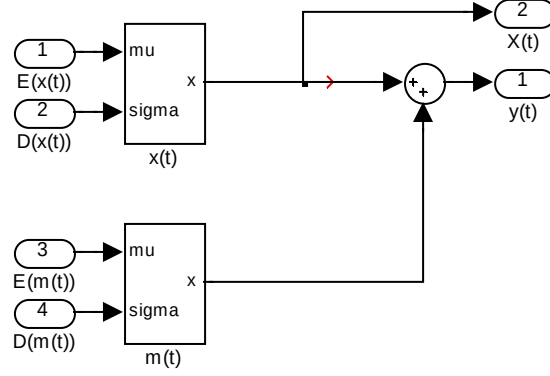
A mérési bizonytalanságon kívül a becslések és az egyéb emberi tényezőkből eredő bizonytalanságokat is tekinthetjük. Itt nehézséget a bizonytalanságok statisztikai jellemzése jelentheti.

3.1. Mindendarabos eset

A mérési bizonytalanság ipari folyamatokban történő kezelésével már több vállalat és kutató is próbálkozott. Ilyennek tekinthető pl. az OSRAM módszere [7], melyben a hagyományos megfelelőség-vizsgálat során már nem csak arról döntöttek, hogy a termék megfelelő, vagy nem megfelelő, hanem ha a mérési pontjukhoz hozzáadott (vagy abból kivont) kiterjesztett mérési bizonytalansággal növelt (csökkentett) érték az elfogadási tartományon kívül esett, akkor a mérést újra elvégezték. Tehát valójában már itt is intervallumokkal dolgoztak, de az intervallum „optimális” hossza nem került kiszámításra.

Ebben a fejezetben arra keressük a választ, hogy a mérés bizonytalanságának ismerete hogyan változtatja meg a termék megfelelőségére vonatkozó döntésünket. Ehhez első lépésben feltesszük, hogy mind az eredeti folyamatot, mind pedig a mérési bizonytalanságot modellezni tudjuk.

Tegyük fel, hogy egy termék összesen n termék előállításának szakaszon esik át ($n+1$ -edik lépés a késztermék átadása a vevőnek). A továbbiakban egy termék előállításának i -edik szakaszát tekintjük, ahol $1 \leq i \leq n$. Legyen adott itt egy alsó LSL_i , egy felső USL_i elfogadási határérték (megfontolásunk olyan esetekre vonatkozik, amelyeknél a minőségi mutató valamilyen névleges értékét a legjobb elérni [8]), valamint egy CL_i előírt érték. Tegyük fel, hogy mind a tényleges folyamat eloszlásfüggvényét $F(x_i(t))$, várható értékét $E(x_i(t))$ és szórását $D(x_i(t))$ is ismerjük. Ismerjük továbbá a mérőműszer bizonytalanságának eloszlásfüggvényét $G(m_i(t))$, valamint a mérőműszer mérési hibájának várható értékét $E(m_i(t))$ és szórását, (mérési bizonytalanságát) $D(m_i(t)) = u_i(m_i(t))$. A mérőműszer mérési hibája sűrűségfüggvényének $y_i(t)$ helyen vett értékét a következőképpen jelöljük: $g_m(y_i(t), \mu, \sigma)$, ahol $\mu = E(m_i(t))$, $\sigma = u_i(m_i(t))$. Legyen az m_i mérőműszerrel t -edik időpontban mért $y_i(t)$ érték $y_i(t) = x_i(t) + m_i(t)$, ami tulajdonképpen a tényleges érték és a mérőműszer eltéréseinek összegeként jellemezhető. Ha ténylegesen ismernénk $x_i(t)$ értékét, akkor egyértelműen el tudnánk dönteni, hogy $x_i(t)$ értékét elfogadjuk ($LSL_i \leq x_i(t) \leq USL_i$), vagy nem megfelelőnek tekintjük ($x_i(t) < LSL_i$ vagy $USL_i < x_i(t)$). Azonban a gyakorlatban $x_i(t)$ értékét nem ismerjük, hanem csak egy $y_i(t)$ értéket tudunk mérni. A kérdés tehát az, hogy a fent említett döntési szabály ekkor is alkalmazható, vagy érdemes-e figyelembe venni a mérőműszer mérési bizonytalanságát. A most bemutatandó szimulációban $x_i(t)$ értékét is ismertnek tételeztük fel, azért, hogy a döntéseink eredményét össze tudjuk hasonlítani azzal az esettel, amikor nem vesszük figyelembe a mérési bizonytalanságot. Ahhoz, hogy a mérési bizonytalanság figyelembevételének fontosságát ellenőrizni tudjunk egy egyszerű modellt építettünk. Itt bemenetként meghatározható a folyamat (vizsgált jellemző) valós értéke ($x_i(t)$), valamint modellezhető a mérőműszer bizonytalansága, illetve ennek eloszlása. Kimenetként az i -edik szakaszban t -edik mért paraméter $y_i(t) = x_i(t) + m_i(t)$, valamint az összehasonlíthatóság kedvéért a valós folyamat $x_i(t)$ értéke (hibamentes mérést feltételezve) jelenik meg. (A későbbiekben $x_i(t)$ ismeretétől eltekintünk.)



1. ábra: A mérési hiba szimulálása

Mivel a gyakorlatban $x_i(t)$ értékét nem ismerjük, így olyan költségekkel is számolnunk kell, melyek a rossz döntéseinkből adódnak, valamint ki kell számítanunk a rossz döntések valószínűségét.

Jelölések: Legyen $\mu_{y_i} = E(y_i(t))$, $\mu_{m_i} = E(m_i(t))$, a mért $y_i(t)$ folyamat, illetve $m_i(t)$ a mérési bizonytalanság várható értéke. Legyen továbbá $u_i = u_c(m_i(t))$ az i -edik szakaszban használt mérőműszer eredő standard mérési bizonytalansága (röviden a mérési bizonytalansága). (A c (combined) -jelölést az egyszerűség kedvéért a továbbiakban elhagyjuk, de továbbra is a mérőműszer eredő standard mérési bizonytalanságát értjük a mérési bizonytalanság alatt.)

3.1.1. Döntési hibák, minőségköltségek

Kétféle hibát különböztetünk meg: első- és másodfajút [8,9] (lásd: 2. ábra):

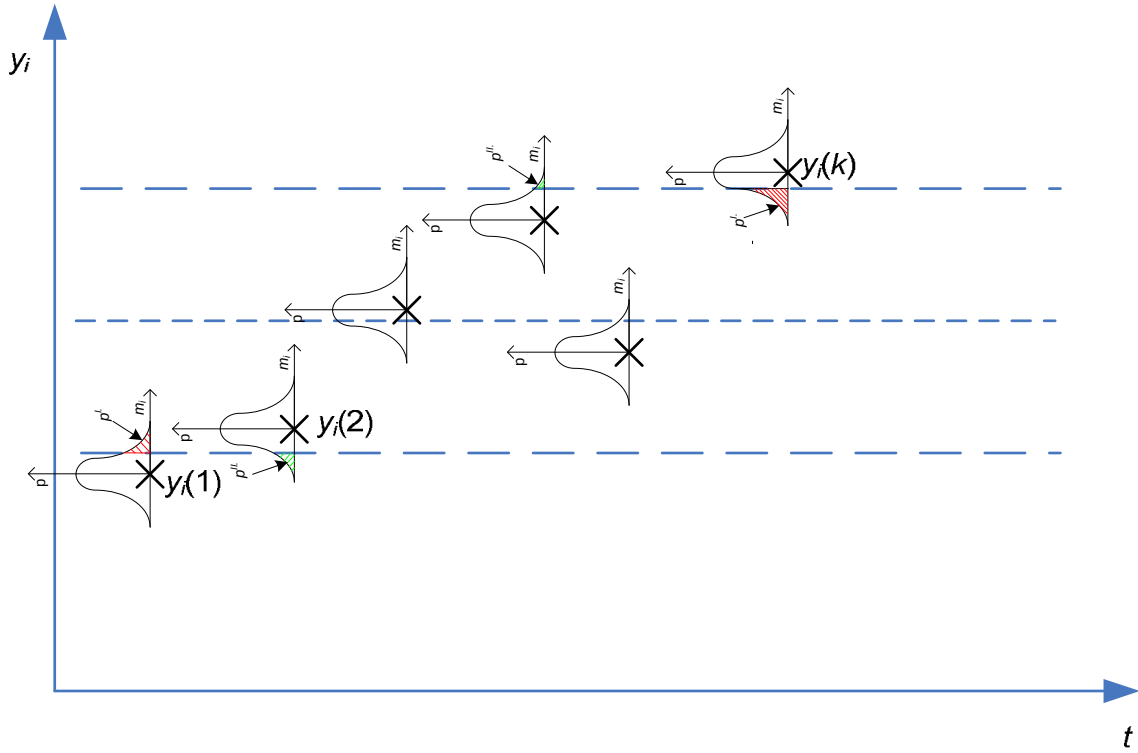
- I. Elsőfajú hiba esetében rossznak ítélünk egy terméket, ezért nem megfelelőnek nyilvánítjuk, de az tulajdonképpen az előírt $x_i(t) \in [LSL_i, USL_i]$ intervallumba, mért értéke viszont ezen kívül esik. $y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$. Ennek valószínűsége legyen:

$$p_i^I(t) = \int_{LSL_i}^{USL_i} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t), \text{ ha } y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i], \text{ különben } 0. \quad (1)$$

- II. Másodfajú hiba esetében jónak ítélünk egy terméket, holott az eredeti $x_i(t)$ termék az elfogadási tartományba nem esik bele. Ennek valószínűsége:

$$p_i^{II}(t) = \int_{-\infty}^{LSL_i} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t) + \int_{USL_i}^{\infty} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t),$$

ha $y_i(t) \in [LSL_i, USL_i]$, különben 0. (2)



2. ábra: A mért pontok és a hozzájuk tartozó hibavalószínűségek eloszlásának sűrűségfüggvénye. $E(m(t))=0$ -át feltételezve.

Meg kell jegyezni, hogy $x_i(t)$ ismerete esetén könnyen definiálhatjuk az egyes hibákat. Elsőfajú hibát vétünk abban az esetben, ha $x_i(t) \in [LSL_p, USL_d]$, de $y_i(t) \notin [LSL_p, USL_d]$. Ennek valószínűsége $p_i^I(t)$. Másodfajú hibát vétünk, ha $x_i(t) \notin [LSL_p, USL_d]$, de $y_i(t) \in [LSL_p, USL_d]$. Ennek valószínűsége $p_i^{II}(t)$.

Tekintsük a gyakorlatban használt döntési szabályt, ami szerint $y_i(t) \notin [LSL_p, USL_d]$ esetén tekintjük nem megfelelőnek a terméket.

Nézzük meg a továbbiakban, hogy milyen veszteségek merülnek fel a termelési folyamattal kapcsolatban. Alapvetően két típusú veszteség költség merül fel. Az egyik a nemmegfelelőségből adódó költség, mely abban az esetben, amikor a termék a megfelelőségi tartományon kívül van, akkor a gyártási folyamatban addig felmerült költségeket jelenti, tehát

$$c_i(t) = c_p, \text{ ha } x_i(t), y_i(t) \notin [LSL_p, USL_d], \text{ egyébként } 0. \quad (3)$$

Ha nem lenne mérési bizonytalanság, akkor $x_i(t) = y_i(t)$. Ugyan az analitikus vizsgálatnál feltesszük, hogy ismerjük az eredeti folyamatot, de a valós környezetben $x_i(t)$ ismeretét sajnos nem tudjuk feltenni. Mivel a tényleges $x_i(t)$ értékét nem tudjuk, így veszteségnek kell tekintenünk, ha megfelelő terméket nyilvánítunk nem megfelelőnek. Ugyanígy veszteségként fog megjelenni a jónak értékelt, de nem megfelelő termék. A későbbiekben $c_i(t)$ meghatározásánál sem fogjuk elvárni $x_i(t)$ ismeretét, de az összehasonlíthatóság kedvéért feltesszük, hogy $x_i(t)$ ismert.

A termék megfelelőségével kapcsolatos döntésünknek egyéb következménye is lehet, hiszen a termék beépül a következő fázisba. Hibás alapanyagokból készült termék esetén további

költségeink merülhetnek fel, hiszen ha a késztermék nem megfelelő, akkor nem csak az alapanyagaink, hanem a teljes termék nem megfelelővé válhat, de ezt egy másik típusú költségben, a döntés költségében érvényesítjük.

A másik típusú veszteség költség az a döntési költség, ami a rossz döntésünk következtében léphet fel. Ennek értéke összesen:

$$c_i^d(t) = p_i^I(t) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p), \text{ ahol } c_i^d \text{ a } i\text{-edik szakasz döntési költsége, } c_p \text{ a presztízsveszteség költsége.} \quad (4)$$

Szimulációnk során a döntési költségeket is könnyen meghatározhatjuk, hiszen

$$\begin{aligned} \sum_t c_i^d(t) &= p_i^I(t) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p) = \\ &= \sum_{x_i(t) \in [LSL_i, USL_i], y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]} (c_{i+1} - c_i) + \sum_{x_i(t) \notin [LSL_i, USL_i], y_i(t) \in [LSL_i, USL_i]} (c_{i+1} + c_p) \end{aligned} \quad (5)$$

Az összeg első tagja azt fejezi ki, ha $y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$, akkor $p_i^I(t)$ annak a valószínűsége, hogy az a termék mégis megfelelő, de mivel nem megfelelőnek nyilvánítottuk (c_i a nem megfelelés költségeként már szerepel, hiszen $y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$), így a terméket nem építettük be a következő lépésbe. Ha csak egyfázisú összeszerelésről beszélünk, akkor c_{i+1} lehet a végtermék árbevétele, melyet elszalasztottunk, ha $p_i^I(t)$ valószínűséggel rosszul döntöttünk. Többfázisú gyártás esetén c_{i+1} lehet a következő fázis költsége is. $i < n$. $i = n$ esetén pedig $c_{i+1} = c_{n+1}$ szintén értelmezhető, úgy mint a végtermék ára.

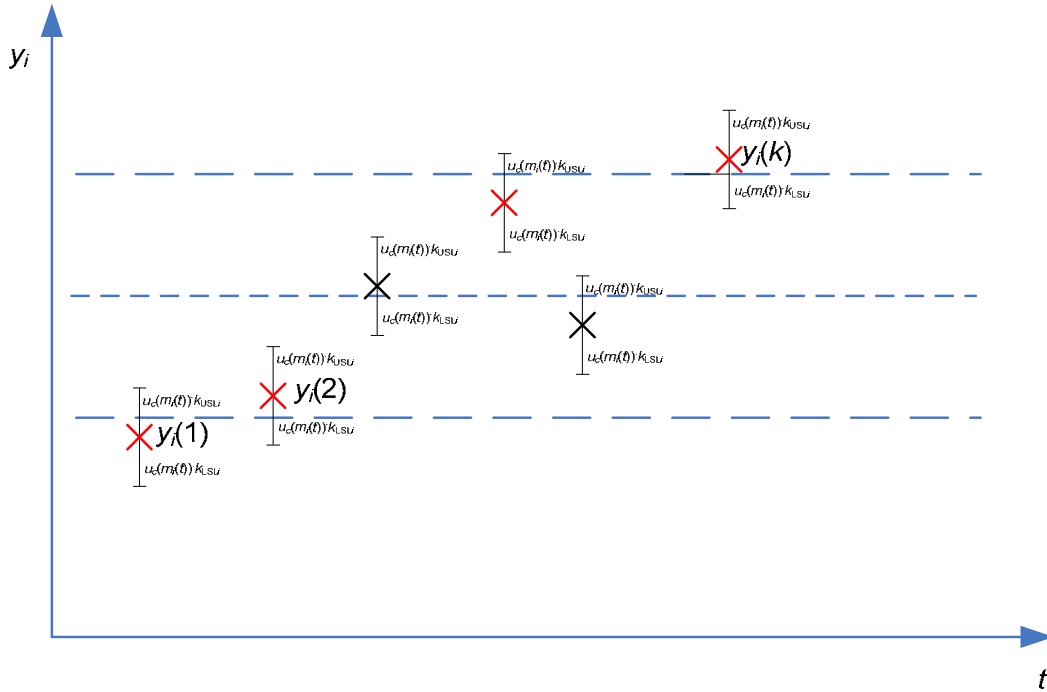
Az összeg második tagja pedig azt a költséget fejezi ki, amikor a termék mérésekor a mért $y_i(t)$ érték belül volt $[LSL_i, USL_i]$ intervallumon, de a valódi érték ezen intervallumon kívül esett. Ekkor beépítjük a félkész terméket a következő fázisba. Mivel azonban egy nem megfelelő terméket építettünk be a gyártás következő szakaszában a termékbe, $p_i^{II}(t)$ valószínűséggel az $i+1$ -edik fázis költsége is jelentkezik. Ha pl. egyfázisú gyártásról beszélünk, az általunk megfelelőnek ítélt, de tulajdonképpen nem megfelelő árut vevői reklamáció esetén vissza kell fizetnünk. Ez további presztízsveszteséget is jelent, melyet c_p -vel jelöltünk. Ennek meghatározása nem könnyű feladat, így ettől a költségtől szimulációinkban eltekintünk.

Az összes veszteség költség (tc) a nem megfelelés költsége és a döntési költség összege: $tc_i(t) = c_i(t) + c_i^d(t) = c_i(t) + p_i^I(t) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p)$. Vegyük észre, hogy a hibavalószínűségek definíciójából adódik, hogy $tc_i(t) = c_i(t) + p_i^I(t) \cdot (c_{i+1} - c_i)$, ha $y_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$. Vagyis ha a terméket nem megfelelőnek minősítettük, akkor jelentkezik egy 'nem megfelelési' költség, valamint egy döntési (többlet) költség, abban az esetben, ha egy olyan terméket nyilvánítunk nem megfelelőnek, ami a következő fázisba beépíthető lett volna. Ha viszont $y_i(t) \in [LSL_i, USL_i]$, akkor $tc_i(t) = c_i(t) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p)$. Vagyis a nem megfelelés költségén kívül a hibás döntésünk költsége, valamint egy presztízsveszteség (c_p) jelenik meg, ha

egy nem megfelelő terméket mégis megfelelőnek ítéltünk. Ekkor az i -edik fázis teljes veszteség költsége $TC_i = \sum_t tc_i(t)$.

Tegyük fel, hogy a priori információként jellemezni tudjuk a mérőműszer mérési bizonytalanságát. Ekkor alkalmazzuk a következő döntési szabályt:

$[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i] \subset [LSL_i, USL_i]$, $k_{LSL_i}, k_{USL_i} \in \mathbf{R}$, esetén a terméket megfelelőnek ítéljük, $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i] \not\subset [LSL_i, USL_i]$ a terméket nem megfelelőnek nyilvánítjuk. A kérdés persze a két konstans $k_{LSL_i}, k_{USL_i} \in \mathbf{R}$ értéke lesz, de előbb definiáljuk az egyes költségeket. Vegyük észre, hogy nem mérési pontokkal, hanem mérési intervallummal fogunk dolgozni (lásd: 3. ábra).



3. ábra: Mérés pontok helyett mérési intervallumok alapján döntünk a termék elfogadásáról, vagy selejtezéséről

A nem megfelelés költsége akkor lép fel, ha a terméket nem megfelelőnek nyilvánítjuk. Vagyis $c_i(t) = c_p$ ha $x_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$, vagy $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i] \not\subset [LSL_i, USL_i]$, ellenkező esetben 0. Mivel $x_i(t)$ értékét továbbra sem tudjuk, továbbra is számolnunk kell az első és másodfajú hiba költségeivel. Ha csak a nem megfelelési költségeket tekintenénk, akkor az optimális megoldás $k_{LSL_i} = k_{USL_i} = 0$ értéknél lenne. Ugyanis ekkor p^I és p^{II} együttes valószínűsége minimális.

A hibavalószínűségek alakulása:

$$p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = \begin{cases} \int_{LSL_i}^{USL_i} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t), & \text{ha } [y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i] \subset [LSL_i, USL_i] \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad (6)$$

$$p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{LSL_i} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t) + \int_{USL_i}^{\infty} f_m(y_i(t), \mu_{y_i} - \mu_{m_i}, u_i) dy_i(t), & \text{ha } [y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i] \subset [LSL_i, USL_i] \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad (7)$$

Szimuláció esetén ismét nagyon egyszerűen tudjuk meghatározni az első és a másodfajú hibákat. Elsőfajú hibát vétünk, ha $x_i(t) \in [LSL_i, USL_i]$, de $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \not\subset [LSL_i, USL_i]$. Ennek valószínűsége: $p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})$. Másodfajú hibát vétünk, ha $x_i(t) \notin [LSL_i, USL_i]$, de $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \subset [LSL_i, USL_i]$, ennek valószínűsége pedig $p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})$.

Ebből adódóan a döntési költségek a mérési bizonytalanságokat figyelembe véve:

$$c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} + c_p), \quad (8)$$

mely értéke $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \not\subset [LSL_i, USL_i]$ esetén

$c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i)$, itt nagyobb k konstansok esetén növekedni fog a döntés költsége, ha $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \not\subset [LSL_i, USL_i]$, tehát, ha a mérési pontunk az elfogadási tartományon kívül helyezkedik el.

$c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} + c_p)$, ha

$[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \subset [LSL_i, USL_i]$ teljesül. Itt viszont nagyobb k konstans esetén a döntési hiba költsége csökkenni fog.

Az i -edik szakaszra vonatkozó teljes veszteség költség kiszámítása:

$$tc_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} + c_p), \quad (9)$$

ekkor $tc_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i)$, ha $[y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_{ic}, y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_{ic}] \not\subset [LSL_i, USL_i]$ és $y_i(t) \in [LSL_i + k_{LSL_i} \cdot u_c, USL_i - k_{USL_i} \cdot u_c]$ esetén $tc_i(t) = c_i(t) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p)$, amely egy konkrét döntés teljes veszteségköltségét mutatja.

Az i -edik szakasz teljes veszteség költsége az összes termékre vonatkozóan:

$$TC_i = \sum_t tc_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})$$

Tehát a teljes veszteség költség minimalizálására felírható matematikai feladat:

$$\begin{aligned} TC_i &= \sum_t tc_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = \sum_t [c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})] = \\ &= \sum_t [c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} + c_p)] \rightarrow \min \end{aligned} \quad (10)$$

Példa: Tekintsük a következő egyfázisú termelési folyamatot, ahol a feladat egy $E(y(t))=10$ méter hosszú gerenda levágása. Tegyük fel, hogy a mérőműszerünknek nincs szisztematikus mérési hibája, vagyis $E(m(t))=0$. Tegyük fel továbbá, hogy a mérőműszer mérési bizonytalansága normális eloszlással jellemezhető, szórása $u_c = \sigma = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. A tűrésmező az elvárt értékre nézve szimmetrikus, $LSL = 9,95 \text{ m}$, $USL=10,05 \text{ m}$. Eddigi kísérleteink azt mutatták, hogy 1000 legyártott termék esetén a várható érték $E(y(t))=10$ méter, míg a tapasztalati szórás $D(y(t))=2,062 \text{ cm} = 2,062 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ értékű. 99,9%-os biztonsággal meggyőződünk, hogy a mért értékek $N(10;0,02062)$ eloszlást követnek. Az előállítási költség $c_i=4 \text{ eFt}$, míg az eladási ár $c_{i+1}=5 \text{ eFt}$. Mivel $u_c \ll D(y(t))$, és mind a mérési eredmények, mind pedig a mérés bizonytalansága normális eloszlást követnek, így feltesszük, hogy a tényleges gyártási folyamatunk is normális eloszlást követ. A mérőműszer és a mért objektum paramétereinek függetlenségét feltételezve, a tényleges folyamat várható értéke $E(x(t))=E(y(t))-E(m(t)) = 10 \text{ m} - 0 \text{ m} = 10 \text{ m}$; szórása: $D(x(t))=\sqrt{D^2(y(t))-D^2(m(t))}=2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Ha $t \rightarrow \infty$, akkor annak valószínűsége, hogy egy termék hossza sincsen benne az előírt intervallumban könnyen kiszámítható:

$$p = 1 - \int_{LSL_i}^{USL_i} f_{N(10;0,02)}(10;0,02) dt = 0,0124, \text{ ami azt jelenti, hogy 1000 legyártott termék esetén}$$

mindössze 12, 42 deszkának szabad nem megfelelőnek lennie. Felfelé kerekítve kapjuk, hogy a nem megfelelés költsége 13 nem megfelelő termék esetén $13 \cdot 4 \text{ eFt} = 52 \text{ eFt}$ lenne, ha pontosan tudnánk, mely termékünk nincs benne az elfogadási tartományban. Azonban a mérőműszer bizonytalanságát is figyelembe véve, a nem megfelelőnek ítélt eszközök aránya:

$$p = 1 - \int_{LSL_i}^{USL_i} f_{N(10;0,02062)}(10;0,02062) dt = 0,0153, \text{ ami azt jelenti, hogy a hagyományos döntési}$$

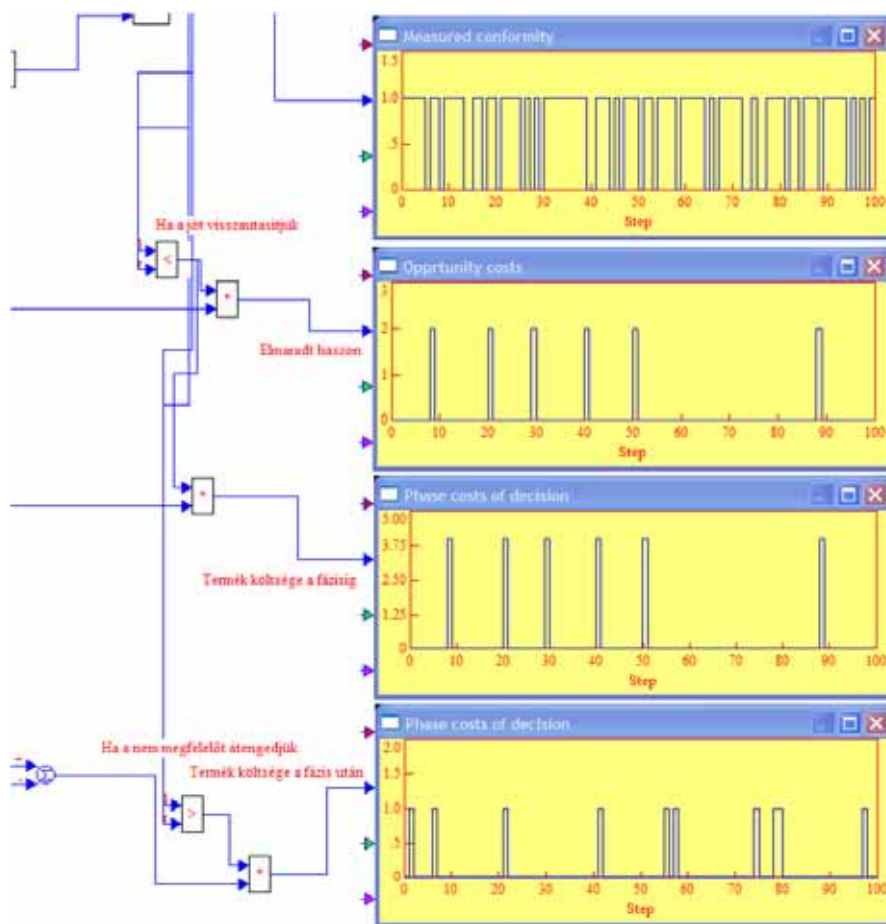
kritériumok szerint 1000 termékből körülbelül 15-16 terméket értékelünk nem megfelelőnek. A nem megfelelés költsége ekkor 16 termék esetén 64 eFt . További költségként jelenik meg, hogy a 15-16 nem megfelelőnek ítélt termék nem feltétlen tartalmazza mind a 12-13 ténylegesen nem megfelelő anyagokat. Ezért döntési költségeink is fellépnek. Egyrészt a nemmegfelelőnek ítélt jó termékünk esetén a nem megfelelés költségén kívül az elmaradt hasznunkat is figyelembe kell venni, másrészt a jónak ítélt valójában nem megfelelő terméket pedig még vissza is kell vásárolnunk. Az egyes hibavalószínűségeket kiszámítva és ezer termékre vetítve 10 olyan termék van, melyet nem megfelelőnek ítéltünk és valóban hibásak. Ekkor erre a nem megfelelés költsége 40 eFt . Annak a valószínűsége, hogy a terméket jónak ítéljük, de mégis rossz, 1000 termékre vetítve 3-szor fordul elő (a nem megfelelés költsége 12 eFt , presztízsköltséggel nem számolunk), viszont mivel vissza kell fizetni a termék árát, ez további 15 eFt -ba fog kerülni. 6 esetben a terméket nem megfelelőnek nyilvánítottuk, pedig nem is volt hibás. Ekkor a költség $6 \cdot 4 \text{ eFt} = 24 \text{ eFt}$, az elmaradt haszon pedig $6 \cdot (5-4) \text{ eFt} = 6 \text{ eFt}$. Az összes költség egyenlő $40 + 12 + 24 + 15 + 6 + 6 = 103 \text{ eFt}$. Ha szimulációt alkalmazunk, akkor k -értékét $\varepsilon > 0$ pontossággal közelíthetjük. A mérési bizonytalanságát $k=10\%$ -ban figyelembe véve, 1000 termékből már csak átlagosan 1-szer fordul elő, hogy egy nem megfelelő terméket megfelelőnek tekintünk. 10-szer továbbra is felismerjük a rossz terméket. 8-szor azonban jó terméket is rossznak ítélünk. Ugyanúgy, ahogyan az előző esetben, 19 alkalommal keletkezett nem megfelelési költség. Azonban a döntési költségeink másképp alakultak. A teljes veszteség költségünk $= 19 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 8 \cdot (5-4) = 89 \text{ eFt}$. A legkevesebb összköltséget ott tudjuk elérni, amikor a jónak ítélt de valójában nem megfelelő termékek száma 0, de az összes nem megfelelési költség nem növekszik.

Ekkor a minimális költség $19 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 9 \cdot (5 - 4) = 85$ eFt, lenne. Azt, hogy elsőfajú hibánk ne legyen, csak végtelen nagy k esetén lehetne elérni, ekkor azonban gyakorlatilag minden terméket nem megfelelőnek ítélnénk. A fenti minimalizálás csak addig folyhat, amíg a nemmegfelelőnek nyilvánított termékek aránya nem növekszik.

Az analitikus meghatározása csak nagyon leegyszerűsített esetekben működik. Azt leszűrhattuk, hogy igenis érdemes a mérési bizonytalanságokkal, mint a priori információkkal foglalkozni, azonban a k -értékek meghatározására szimulációs eljárást kell kidolgoznunk, melyek a különböző eloszlások és költségparaméterek esetén is használhatók. A szimuláció előnye, hogy gyakorlatilag bármely eloszlás és bármely paraméter esetén nagyszámú szimulációval vizsgálhatjuk, hogy érdemes-e a mérési bizonytalanságokat figyelembe venni a termék vizsgálatánál. (Az első ábra szerinti modellben külön-külön beállítható mind a folyamat, mind a mérőműszer mérési bizonytalanságára vonatkozó eloszlások paraméterei).

2.1.2. Szimulációs módszerek

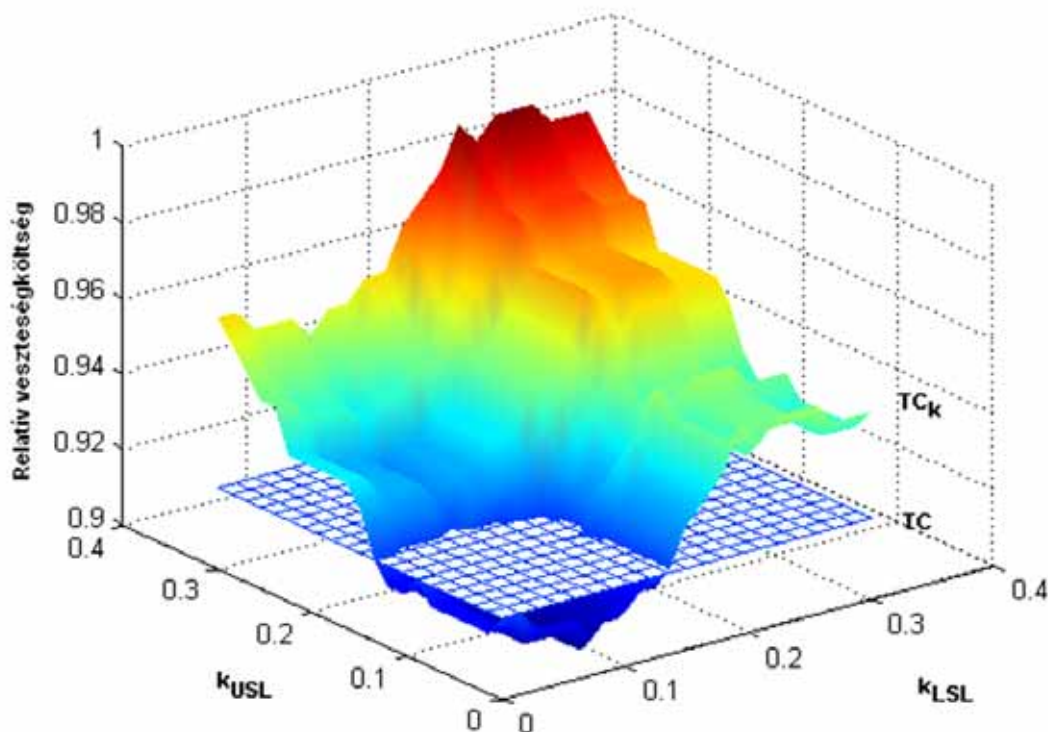
Nagyobb lépésszámú, szignifikáns különbségek megállapítására a VisSim és Matlab szimulációs szoftvereket alkalmazhatunk. (1. és 4. ábrák).



4. ábra: Mérési paraméterek, döntési költségek szimulációja VisSim segítségével.

Ahhoz, hogy a mérési bizonytalanság figyelembevételét és figyelembe nem vételét össze tudjuk hasonlítani, továbbra is feltesszük, hogy ismerjük a tényleges folyamatot, így próbáljuk k értékét meghatározni bizonyos eloszlásokra. A fenti szimulációs elrendezéssel normális eloszlást

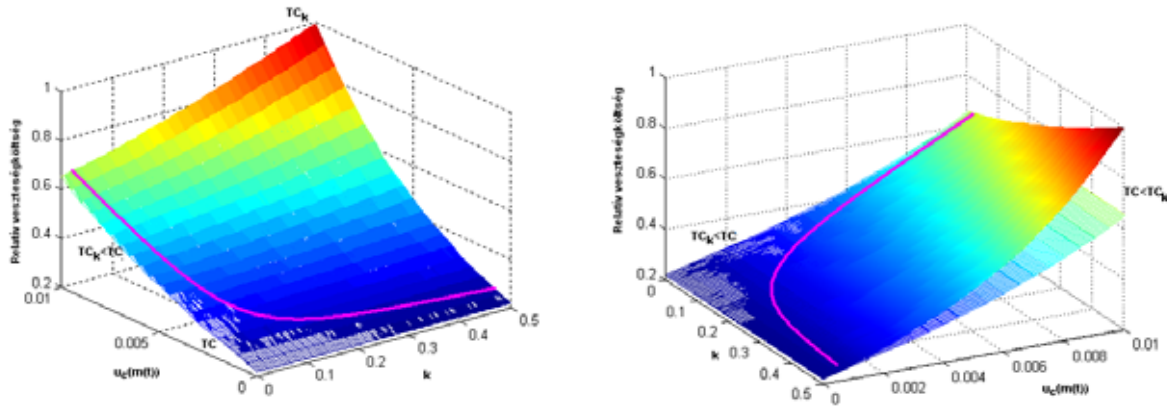
feltételeztünk mind a folyamat, mind a mérési bizonytalanság részéről, de természetesen más eloszlásokra ugyanígy konstruálható egy tesztelrendezés. Matlab használatával egymillió kísérletre elvégezve az előző példát, k_{USL} , k_{LSL} függvényében az 5. ábrát kaptuk.



5. ábra: Az összes veszteségköltség alakulása a mérési bizonytalanság figyelembevételének függvényében. (A maximális költségcsökkenés 3-4%)

Látható az 5. ábrán, hogy k_{LSL} , k_{USL} függvényében a költségek eloszlása nagyjából szimmetrikus, hiszen a folyamat és a mérési bizonytalanság eloszlása is szimmetrikus volt. $k=k_{LSL}=k_{USL}$ paraméter figyelembevételével az összes veszteségköltség csökkenthető.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy a mérési bizonytalanság függvényében mekkora $k=k_{LSL}=k_{USL}$ mértékben célszerű figyelembe venni a mérőműszer mérési bizonytalanságát. A továbbiakban is az előző példában megfogalmazott költségadatokkal dolgoztunk. A mérési bizonytalanságot 1 mm és 1 cm között, vagyis a folyamat szórásához mérten 5-50% között választottuk. k értékét $5 \cdot 10^{-3}$ – $5 \cdot 10^{-1}$ -ig választottuk, hiszen $k=0$ esetén a két költség megegyezik. Normális eloszlást feltételezve a 6. ábrát kaptuk.



6. ábra: Az összes veszteségköltség alakulása a mérőműszer mérési bizonytalanságának, valamint k -értékének függvényében

A költségek a mérési bizonytalanság növekedésével megközelítőleg négyzetes arányban növekednek. Mivel a mérési bizonytalanságot a mérőműszer bizonytalanságának k -szoros szorzataként vettük figyelembe, így nem meglepő, hogy egy hiperbola alatt találhatók azok a pontok, ahol költséget tudunk csökkenteni. Relatív kisebb mérési bizonytalanság esetén viszont akár 2-6%-al is csökkenthetők a változó költségek.

A fenti, mérési bizonytalanságot figyelembe vevő módszer alkalmazása során arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha ismerjük a folyamat mért $y_i(t)$ paramétereit (várható értékét $E(m_i(t))$, szórását $u_i(m_i(t))$), eloszlásfüggvényét, valamint a mérőműszer szisztematikus hibáját $E(m_i(t))$, bizonytalanságát $u_i(m_i(t))$, akkor vajon meg lehet-e becsülni k értékét? Az előzőekben láthattuk, hogy ebben az esetben építhető egy szimulációs eszköz, mellyel k -értékét meg tudjuk határozni. Bizonyos feltételek teljesülése esetén (függetlenség, normalitás stb.) analitikusan is meg lehet becsülni az optimális k -értékét.

Az analitikus módszer kiváló, ha az a célunk, hogy meggyőződjünk a mérési bizonytalanság figyelembevételének szükségességéről, de mivel $x_i(t)$ -t a gyakorlatban csak becsülni tudjuk, vagy azt sem, egy olyan módszert kell keresnünk, mely nem tételezi fel a priori információként a folyamat tényleges $x_i(t)$ értékének ismeretét.

A nem megfelelés költségei és valószínűségei

Az előző modell csak a nemmegfelelési költségek esetében tételezte fel a $x_i(t)$ ismeretét. Nemmegfelelőnek tekintettük azt a terméket, amelyet a döntés során nemmegfelelőnek ítéltünk. Nemmegfelelési költségként lépett fel azonban azon termék költsége is, melyet jónak tekintettünk, beépítettünk a következő fázisba, mivel azonban mégis rossz volt maga a termék, ezért mégis hibásnak kellett tekintenünk. Tehát azt a kérdést kell feltennünk, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy egy termék nem megfelelő (vagy nem megfelelőnek tekintjük). Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor nem számolunk a műszer mérési bizonytalanságával. További jelölésként vezessük be a mérés szórásának jelölését. Legyen ez $\sigma_{y_i} = D(y_i(t))$.

Ha ismert a mért folyamat várhatóértéke $\mu_{y_i} = E(y_i(t))$, szórása $\sigma_{y_i} = D(y_i(t))$, sűrűségfüggvénye $f_y(\cdot, \mu_{y_i}, \sigma_{y_i})$, illetve eloszlásfüggvénye, akkor könnyen kiszámítható, mekkora

annak a valószínűsége, hogy egy termék megfelelő-e, vagy nem. Ehhez először azt kell kiszámolnunk, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy termék nem teljesíti az előírt paramétereket a méréseink eredménye alapján. Legyen ennek valószínűsége:

$$p_i^{w_y}(t) = \int_{-\infty}^{LSL_i} f_y(y_i(t), \mu_{y_i}, \sigma_{y_i}) dy_i(t) + \int_{USL_i}^{\infty} f_y(y_i(t), \mu_{y_i}, \sigma_{y_i}) dy_i(t). \quad \text{Költsége: } c^{w_y}(t) = c_i \cdot p_i^{w_y}(t).$$

Azonban veszteség akkor is keletkezik, ha egy terméket annak ellenére hibásnak tekintünk, hogy az megfelelő volt, illetve egy nem megfelelő terméket tovább engedünk (I. vagy II. fajú hibát vétünk.) $c^{w_l}(t) = c_i \cdot p_i^I(t)$, $c^{w_n}(t) = c_i \cdot p_i^{II}(t)$. A teljes nem megfelelési költség tehát $c_i(t) = c^{w_l}(t) + c^{w_n}(t)$.

A teljes veszteség költség alakulása:

$$\begin{aligned} TC_i &= \sum_t tc_i(t) = \sum_t (c_i(t) + c_i^d(t)) = \sum_t [c_i(t) + p_i^I(t) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t) \cdot (c_{i+1} + c_p)] = \\ &= \sum_t c_i \cdot p^{w_y}(t) + p_i^I(t) \cdot (c_{i+1}) + p_i^{II}(t) \cdot (c_i + c_{i+1} + c_p) \end{aligned} \quad (11)$$

Ha a mérőműszer bizonytalanságát is figyelembe vesszük, akkor ez a nem megfelelő termékek bekövetkezési valószínűségét a következőképpen érinti:

$$\begin{aligned} p_i^{w_y}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) &= \int_{-\infty}^{LSL_i} f_y(y_i(t) - k_{LSL_i} \cdot u_i, \mu_{y_i}, \sigma_{y_i}) dy_i(t) + \\ &+ \int_{USL_i}^{\infty} f_y(y_i(t) + k_{USL_i} \cdot u_i, \mu_{y_i}, \sigma_{y_i}) dy_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

A nem megfelelési költségek alakulása hasonlóan az előzőekhez:

$$c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = c^{w_y}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + c^{w_l}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + c^{w_n}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})$$

Ebből a teljes veszteség költség az alábbiak szerint becsülhető:

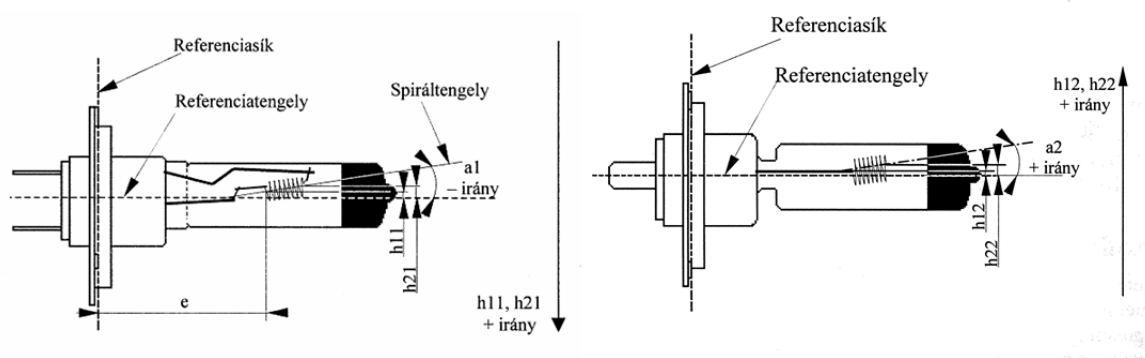
$$\begin{aligned} TC_i &= \sum_t tc_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) = \sum_t (c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + c_i^d(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})) = \\ &= \sum_t [c_i(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i) + p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} + c_p)] \\ &= \sum_t [c_i \cdot p^{w_y}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) + p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1}) + p_i^{II}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_i + c_{i+1} + c_p)] \end{aligned} \quad (13)$$

Látható hogy a teljes veszteség költségünk ismét három tagból áll. Az első $c_i \cdot p^{w_y}(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i})$ tag azt mutatja, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy egy terméket a mért paraméterek alapján nem megfelelőnek nyilvánítunk. A második tag $p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1} - c_i + c_i) = p_i^I(t, k_{LSL_i}, k_{USL_i}) \cdot (c_{i+1})$ annak a valószínűségét jelzi, hogy egy termék megfelelő volt, de mi mégis hibásnak ítéltük. Ennek döntési költsége $c_{i+1} - c_i$. Azonban nem szabad elfelejteni, hogy mivel a terméket nemmegfelelőnek nyilvánítottuk, ezért c_i nem megfelelési költség is megjelenik. A harmadik tag annak a döntésnek a költsége, amely egy rossz terméket

jónak ítélt. E szerint c_i nem megfelelő költségen túl jelentkezik annak a költsége is, hogy ez a termék a következő fázisba is beépült. Ennek költsége c_{i+1} . Ezen kívül még meghatározható egy c_p presztízs veszteség is.

2.1.3. Esetpélda - A mérési bizonytalanság figyelembe vételének gyakorlati alkalmazása

A következő szimulációban egy autólámpa gyártásának egyik fázisát az ún. X-Y tárcsa és a fejtelt lámpa összehegesztését tekintettük. Az automatikus optikázó gép feladata a lámpák méreteinek meghatározása, valamint a lámpák beállítása egy optimalizációs algoritmus segítségével. A berendezés ezt követően, összehegeszti az alkatrészeket, majd az azt követő mérőhelyen újraméri a lámpák méreteit, és ezek alapján osztályozza őket. A mért paraméterek: e (fénypont), h (h_{11} , h_{21}), a (a_1 , a_2), amelyek a 7. ábrán láthatók.



7. ábra: Egy autólámpa gyártása során mérendő paraméterek

e (fénypont): Az (e) paraméter megadja a spirál első menetének külső szélé és a spiráltengely metszéspontjának távolságát a referenciasíktól az előírás szerinti alsó mérőirányból mérve.

h (h_{11} , h_{21}): A referenciatengely és a spiráltengely távolsága a referenciatengelyhez közelebb eső menet magasságában a referenciasíkkal párhuzamos síkban. Az előírás szerint az első és a második mérőállásból is mérni kell.

h (h_{21} , h_{22}): A referenciatengely és a spiráltengely távolsága a referenciatengelytől legtávolabb eső menet magasságában a referenciasíkkal párhuzamos síkban. Az előírás szerint az első és a második mérőállásból is mérni kell.

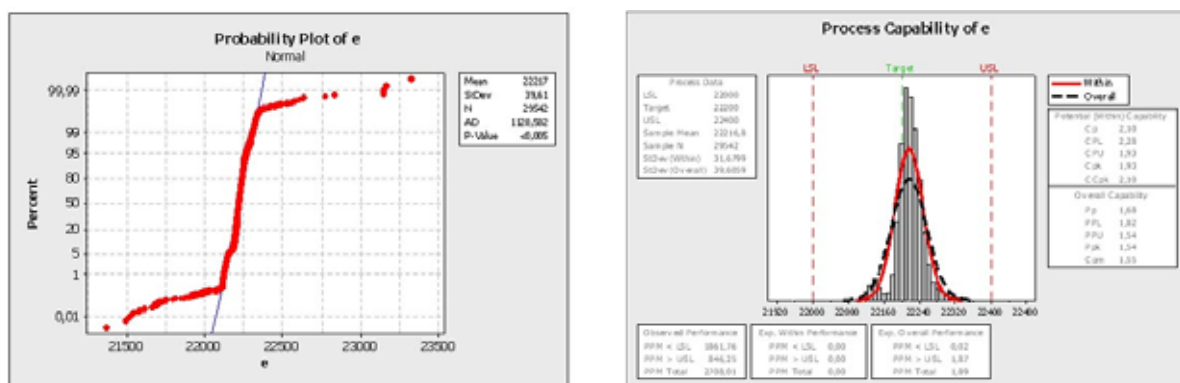
a (a_1 , a_2): a spirál tengelyének a referenciatengellyel bezárt szöge. A szöget a h_1 és h_2 méretek méréséhez felvett mérőpozícióból határozzuk meg. Az előírás szerint az első és a második mérőállásból is mérni kell.

	a_1	a_2	e	h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}
USL _{<i>i</i>}	180	180	22400	150	150	250	250
CL _{<i>i</i>}	0	0	22200	0	0	0	0
LSL _{<i>i</i>}	-180	-180	22000	-150	-150	-250	-250

1. táblázat: Határértékek, előírt értékek (μm -ben)

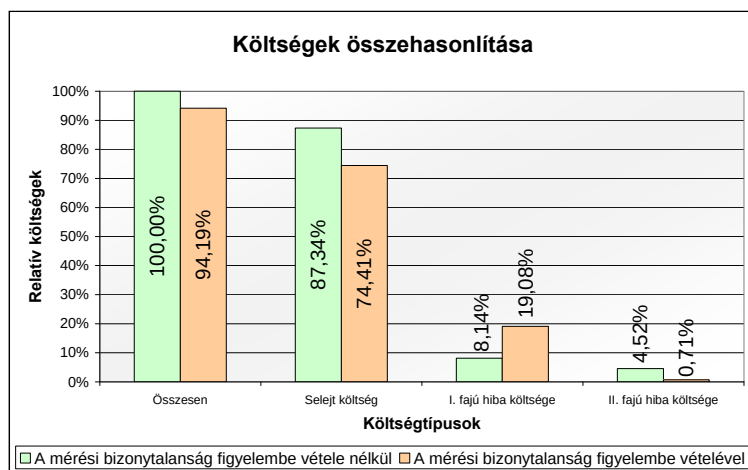
A feladat megoldásához a következő paraméterekre volt szükségünk (méréseinket 30000 minta alapján végeztük): mérési adatok $y_i(t)$, a folyamat eloszlásfüggvénye $F_y(y_i(t), \mu_{y_i}, \sigma_{y_i})$, a folyamat eloszlásához tartozó sűrűségfüggvény $f_y(y_i(t), \mu_{y_i}, \sigma_{y_i})$ normalitás feltételezése esetén, a folyamat szórása σ_y , a folyamat várható értéke μ_y , a mért paraméter előírt értéke x_i és specifikációs határai LSL_y , USL_y , a mérési bizonytalanság várható értéke μ_m és szórása $\sigma_m = u_i(m(t))$, a hibatípusokhoz tartozó költségek (c_p , c_{i+1} , c_p). A továbbiakban a 7 paraméterből 1-et, a fénypontot ragadjuk csak ki. Meg kell jegyezni, hogy egy termék, ha bármely paramétere szerint nem megfelelő, akkor ténylegesen nem megfelelőnek tekintik. Éppen ezért mód nyílik a többi paramétertől független vizsgálatra. (Feltéve, ha a mért paraméterek között nincs korreláció).

A termék előállítója a mérőműszereket rendszeresen kalibrálja, így a mérés bizonytalanságára vonatkozó paramétereket ismerjük. Az e fénypontra kapott értékek megoszlása 30000 mérést követően a 8. ábrán látható. A 8. ábra mutatja, hogy a mérőműszer hibája 0 várható értékű, míg szórása 10 μm volt. A folyamat 99%-os biztonsággal normális eloszlást követett.



8. ábra: $A_z(e)$ fénypontparaméterre vonatkozó normalitásvizsgálat eredménye, valamint a mért értékek empirikus eloszlása.

A költségeket illetően: az i -edik fázis költsége, ami egyben az egységnyi nem megfelelési költség is $c_i=0,5$; míg az $i+1$ -edik lépés költsége: $c_{i+1}=0,6$ (eFt-ban). (A presztízsköltséget (c_p) a szimulációnk során nem vettük figyelembe, nullának tekintettük).

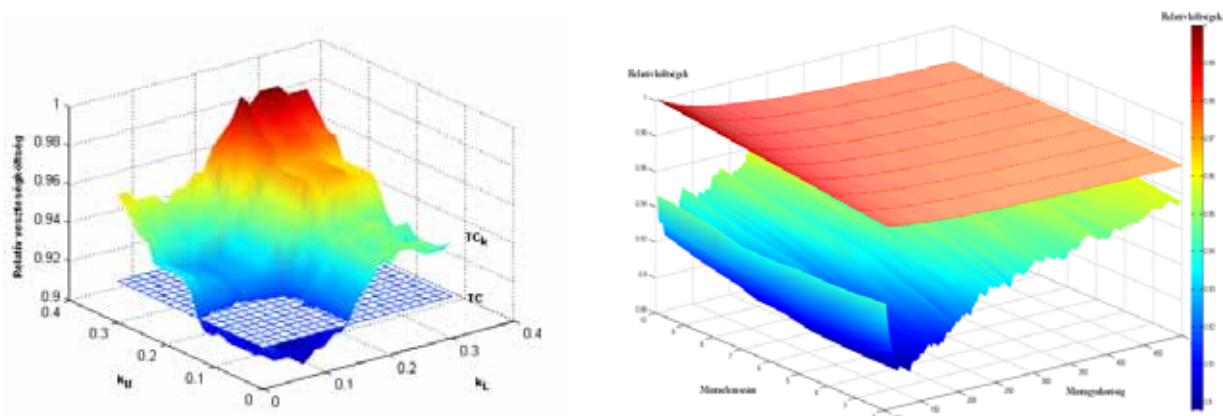


9. ábra: (Relatív) költségek összehasonlítása, (az összes veszteség költség a mérési bizonytalanság figyelembevétele nélkül = 100%).

A kapott eredmények a 9. ábrán láthatóak, amely alapján elmondhatjuk, hogy majdnem 6 százalék költséget lehet megtakarítani a mérőműszer mérési bizonytalanság figyelembe vételével. Az eddigi szimulációs tapasztalatoknak megfelelően az első fajú hiba költsége megnőtt (így többször előfordult, hogy „jó” terméket rossznak ítéltünk). Míg a másodfajú hiba jelentős mértékben, szinte 0-ra lecsökkent. Ha valamennyi paramétert figyelembe vesszük valamennyi folyamatlépés során, akkor ez a költségcsökkenés kevesebb is lehet, attól függően, hogy az egyes mért paraméterek között mekkora (és milyen irányú) a korrelációs összefüggés.

2.2. Mintavételes eset

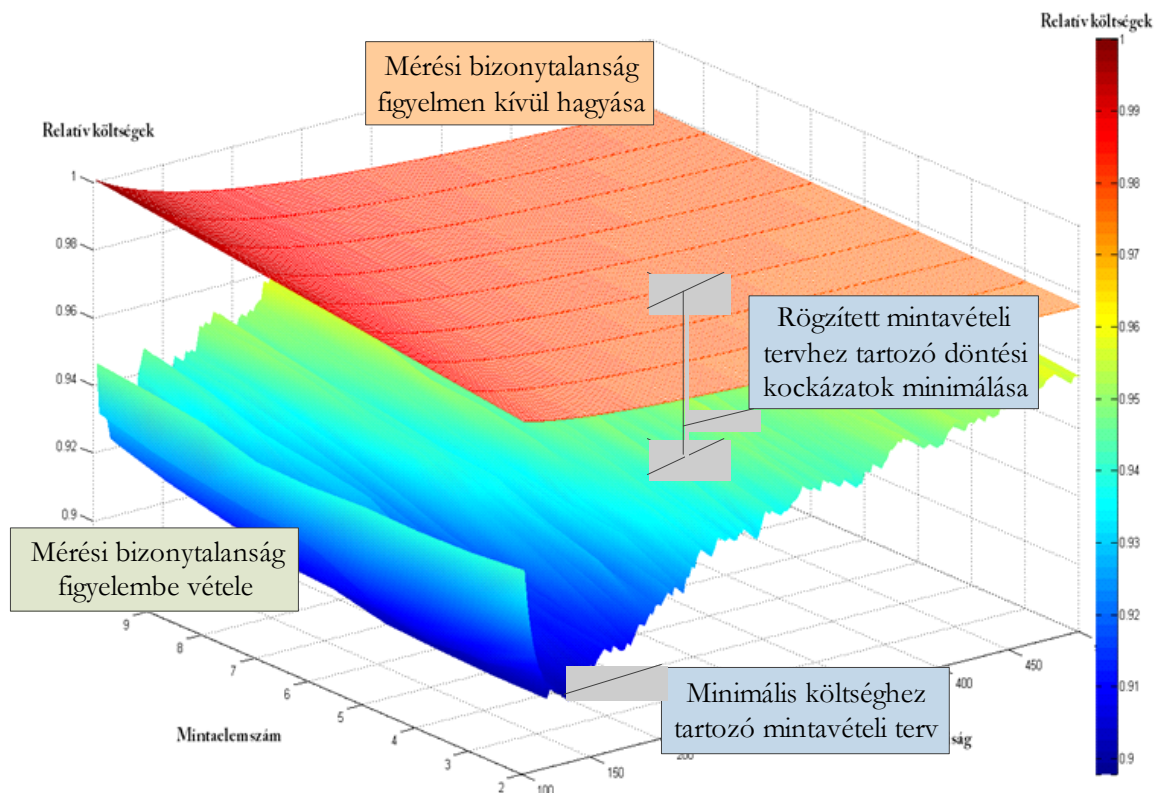
Sok esetben nem végezhető el a mindendarabos ellenőrzés, egyrészt mert az túlságosan költséges lenne, másrészt pedig olyan termékek esetén ahol az ellenőrzés csak a termék roncsolódásával mehetne végbe (pl.: szakítószilárdság vizsgálata). Egy mintavételes mérés költsége a $c_M = c_{fr} + c_m \cdot m$ képlettel számítható, ahol c_m egy mintadarab lemérésének költsége, c_{fr} az egy minta kiválasztásával és mérésre való előkészítésére vonatkozó költség, m pedig a minta elemszám. m_{fr} jelöli a mintavételezés gyakoriságát. Így egy mintavételes mérés költsége minden m_{fr} -edik termék legyártása után jelentkezik. A következtetések alapján az összes mérési költség a mintaelemszám szerint lineáris (vagyis minden újabb minta esetén egységnyel nő), m_{fr} függvényében pedig hiperbolikus (tehát ha a gyakoriság értéke a felére csökken, akkor ugyanabból a sokaságból kétszer gyakrabban veszünk mintát).



10. ábra: mérési bizonytalanság figyelembevételének hatása mindendarabos (bal oldali ábra) és mintavételes (jobb oldali ábra) eljárásokban (bal oldali ábrán: TC teljes költség a mérési bizonytalanság figyelembevétele nélkül, TC_k teljes költség a mérési bizonytalanság figyelembevételével; jobb oldali ábrán: színes ábra mutatja a különböző mintavételi tervekhez tartozó optimális k tényező melletti relatív költségeket; a színes ábra feletti felület mutatja a különböző mintavételi tervekhez tartozó (relatív) költségigényeket, ha a mérési bizonytalanságot nem vesszük figyelembe.)

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor nem tételekből, hanem folyamatból veszünk mintát, így az N alapsokaság két mintavétel között legyártott, de még át nem vett termékek, vagy félkészek számát jelenti.

Szimuláció segítségével itt is meghatározható az az optimális mintavételi terv (minimális költséghez tartozó mintavételi nagyság és mintavételi gyakoriság) [10], ahol a kockázatok mértéke minimális, illetve egy rögzített mintavételi tervre minimálni lehet a kockázatok mértékét.



11. ábra: mérési bizonytalanság figyelembe vétele mintavételes vizsgálat esetén

A szimulációkat úgy állítjuk össze, hogy a $\pi_{ij}=r_{ij}-c_{ij}$ $i, j \in \{0;1\}$ döntési kimenetekhez tartozó fedezetek (lásd: 1. táblázatot). , az LSL, USL specifikációs határok a tényleges érték eloszlása (típusa és paraméterei), a mérési bizonytalanság eloszlása (típusa és paraméterei) bemenő paraméterként szerepel. Habár a gyakorlatban a vizsgált jellemző tényleges értékének eloszlása közvetlenül nem figyelhető meg, a mért érték és a mérési bizonytalanság eloszlásából dekonvolúció segítségével meghatározható. További bemenő paraméter az n mintaelemszám és a két mintavétel és döntés között legyártott N darabszám. Emellett egy elfogadási szabály is definiálható, hogy a minta hányad részének kell megfelelő minősítést szerezni, hogy elfogadjuk a tételt.

A szimuláció legenerálja a tényleges értékeket, majd ezekre mérési bizonytalanságot illeszt a bemeneti eloszlásoknak megfelelően. Mind a tényleges értéket mind a bizonytalansággal terhelt mérési eredményt eltárolja gép, így lehetőséget biztosítunk a megfelelőségről hozott döntések helyességének vizsgálatára és az egyes döntési hibák számának meghatározására. A mintavételi terv szerint felosztjuk a kapott mérési eredményeket N nagyságú halmazokra és ezekből kiválasztunk n darab elemet. A mintában szereplő egyedek (bizonytalansággal terhelt) mért y értéke és az elfogadási szabály alapján dönt a gép az elfogadásról vagy visszautasításról. Ez a döntés lesz a valós (bizonytalanság figyelembe vétele nélküli) döntés. Még két másik döntési kimenetelt rögzítünk a szimuláció során, a mérési bizonytalanság nélküli döntést, amikor a tényleges x értékre alapozunk, illetve amikor a K_l^{Nn} ($l=1..q$) mértékével módosított elfogadási határookra, és a mért y értékre alapozunk. Ez utóbbi döntés eredménye nem skaláris érték, hanem egy q elemű vektor. A K korrekciós tényező felső indexe a rögzített mintavételi tervre, a sokaság (N) és a minta (n) méretére utal, az alsó pedig arra, hogy K^{Nn} vektor hányadik elemét vette számításba a kiértékelés során. A K^{Nn} vektor elemeit megadhatjuk felsorolással, valamilyen (számtani vagy mértani) sorozatként, vagy q darab véletlen szám legenerálásával.

A szimuláció során kimenetként kapjuk a Π_0 valódi, Π_G mérési bizonytalanság nélküli és Π_K korrekciós tényezőtől függő várható összes fedezetet. A háromfajta fedezeti érték így összehasonlíthatóvá válik, megadható hogy mely K^{Nn} értékek adnak jobb megoldást annál, mintha nem vennénk tudomást a bizonytalanságról, illetve ezek a Π_G értékhez képest milyen távol vannak. Kiválasztható a legmagasabb összes várható fedezetet adó K_l^{Nn} érték. Ez lesz ennél a rögzített mintavételi tervnél az optimális korrekciós tényező.

A szimulációs vizsgálatok következő lépéseként az n mintaelemszámot és két mintavétel között legyártott N darabszámot is vektoriális bemeneti változóként definiáltuk. Mind a mintavételhez, mind a mintában lévő elemek leméréséhez társítható költség, ezek legyenek rendre c_N és c_n . Így a mintavételes ellenőrzés költsége $(M/N) \cdot (c_N + n \cdot c_n)$ költséggel csökkenti az összes fedezetet (M az összes termékegyed száma), valamint a mintából való becslés bizonytalansága is változik az N/n arány változásával (még hozzá nem is lineárisan). Az egyes N és n kombinációkhoz megadható az előző szimulációs lépésben bemutatott módon az adott mintavételi tervnél optimális K_l^{Nn} érték. Ebben a lépésben pedig megkapjuk azt a mintavételi tervet, amiben a mérési bizonytalanság figyelembe vételével a legmagasabb várható összes fedezet érhetjük el az előzetesen definiált kombinációk közül.

A két szimulációs lépés eredményeként a megfelelőség-ellenőrzés irányításáért felelős vezető egy olyan eszközt kap a kezébe, amely segítségével meghatározhatja a döntési kockázatok és várható fedezetek szempontjából legjobb mintavételi tervet és elfogadási szabályt.

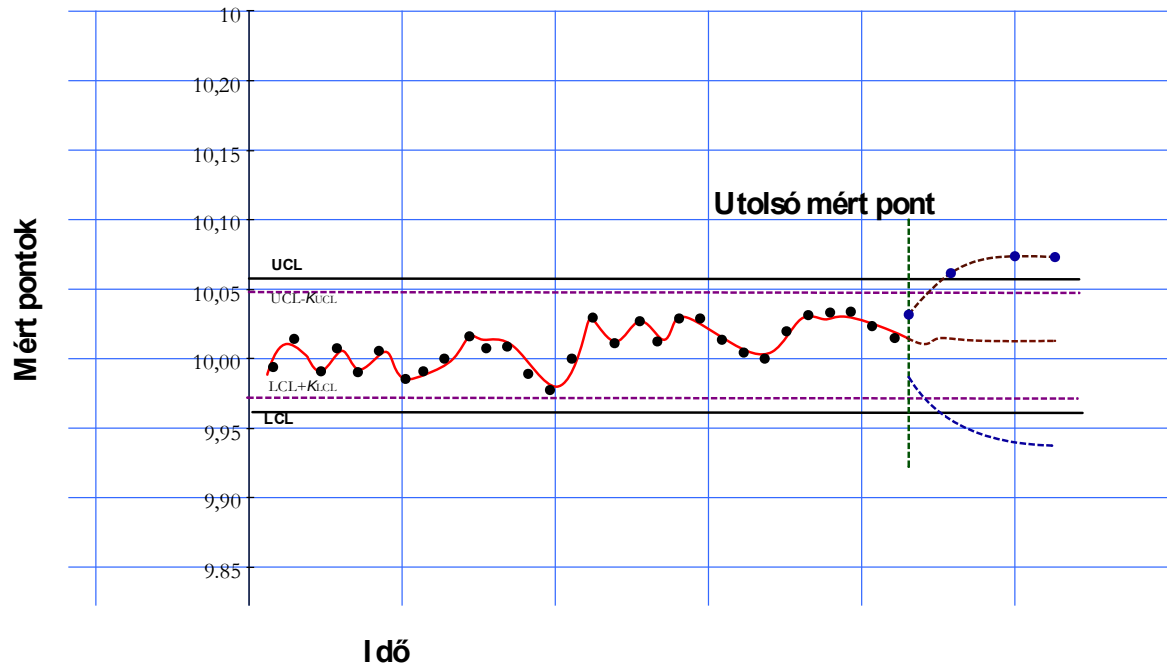
2.3. Előrejelzés

Ha magát a termelési, vagy karbantartási folyamatot vizsgáljuk, akkor a folyamat lefutását többféleképpen is kezelhetjük. Tekinthetjük úgy, hogy különböző állapotai vannak, melyeket mesterséges neurális hálók segítségével azonosíthatunk [11,12]. Egy hosszabb kezdeti megfigyelés után összegyűjthető, hogy egy adott folyamatnak milyen állapotai vannak és ezek között mekkora az átmenetek valószínűsége. Azaz megkaphatjuk, hogy a mért jellemzők alapján most melyik állapotban van a folyamat és várhatóan meddig marad ebben az állapotában, majd pedig mi a legvalószínűbb állapot, amibe átvált. Ha a karakterisztika jelenlegi vagy legvalószínűbb következő állapota olyan, hogy az veszélyezteti az üzemszerű működést, be kell avatkozni.

Másik lehetőség, hogy idősróként kezeljük ezeket az értékeket, és idő- vagy frekvenciatartományban vizsgáljuk őket.

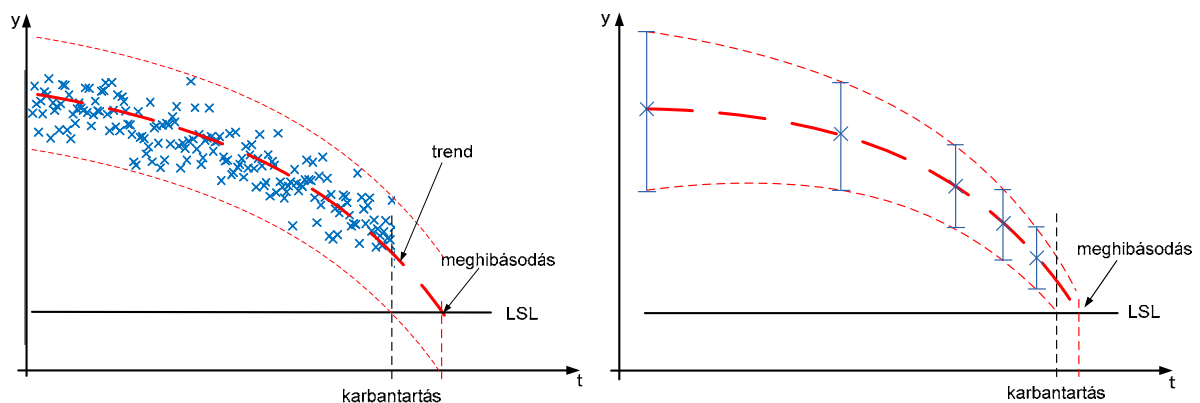
Preventív karbantartási feladatokban a meghibásodás előrejelzése és megakadályozása a cél. A felügyeleti költségek és kockázatok közötti optimális arány megteremtéséhez a mintavételezési tervet kell módosítani. A következő mérés, mintavételezés ideje tulajdonképpen csak a beavatkozási határtól mért távolság és a felügyeletet ellátó szakember tapasztalatától függött. A most bemutatandó modellel megbízhatósági szintek szerint megadható a várható meghibásodás ideje és ez alapján a következő mérés időpontja. Illetve adott időpontban megadható a meghibásodás valószínűsége.

Ha kopás, degradáció lép fel a berendezésnél, akkor az ehhez tartozó karakterisztika lefutása valamilyen trendet mutat, célszerű azt idősorosan vizsgálni. Ahhoz hogy lineáris sztochasztikus folyamatmodellekkel kezelni tudjuk, dekomponálni kell a karakterisztika értékeinek idősorát. A trend adja meg a várható értéket az előrejelzésünkben. Ehhez az előrejelzéshez kapcsolódó bizonytalanságot pedig a véletlen ingadozás értékéből, a mintavételezési gyakoriságból, mintanagyságból és az előrejelzés időtávjából kapjuk meg. Ha azonos időközönként veszünk mintát, akkor a trend körüli konfidencia intervallum állandó szélességű lesz. Az intervallum alsó és felső határa párhuzamosan fut a trend alatt illetve felett.



12. ábra: termelési folyamatok sztochasztikus folyamatként való kezelése (folytonos egyenes vonalak mutatják a beavatkozási, vagy specifikációs határokat; a szaggatott vonalak jelzik a mérési bizonytalanság figyelembevételével kialakított kockázatalapú, módosított határokat; a következő mérésre ott van szükség, ahol az előrejelzett folyamat alsó/felső határa eléri a kockázatalapú beavatkozási, vagy specifikációs határt.)

Ahogy az a fenti ábrán látszik, megfelelő identifikálás esetén, adott kockázati szint mellett megadható a következő mérendő pont is. Ezt az elvet nem csak stacioner folyamatok esetén, hanem a karbantartás területén megjelenő kvázi-stacioner folyamatok esetén is lehet alkalmazni.



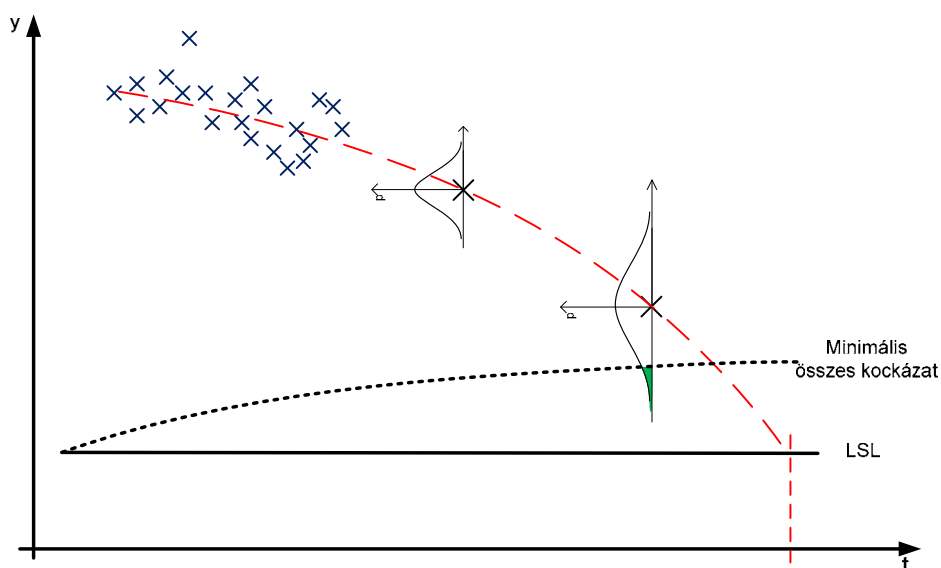
13. ábra: A mért értékekhez tartozó konfidencia intervallum

Azonos megbízhatóság mellett csökkenthető a konfidencia intervallum szélessége, ha az LSL-hez közeledve gyakrabban veszünk mintát (13. ábra jobb oldala), mert ekkor a mintából egyre kevesebb sokasági elemre következtetünk. A konfidencia intervallum nagysága:

$$INT_{1-\alpha} = \bar{y} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \quad (14)$$

ahol n a minta nagysága, N a sokaság, amire a mintából következtetünk, σ az összes bizonytalanság szórásként kifejezve, t pedig az $1-\alpha/2$ konfidencia szinthez tartozó Student-eloszlás értéke.

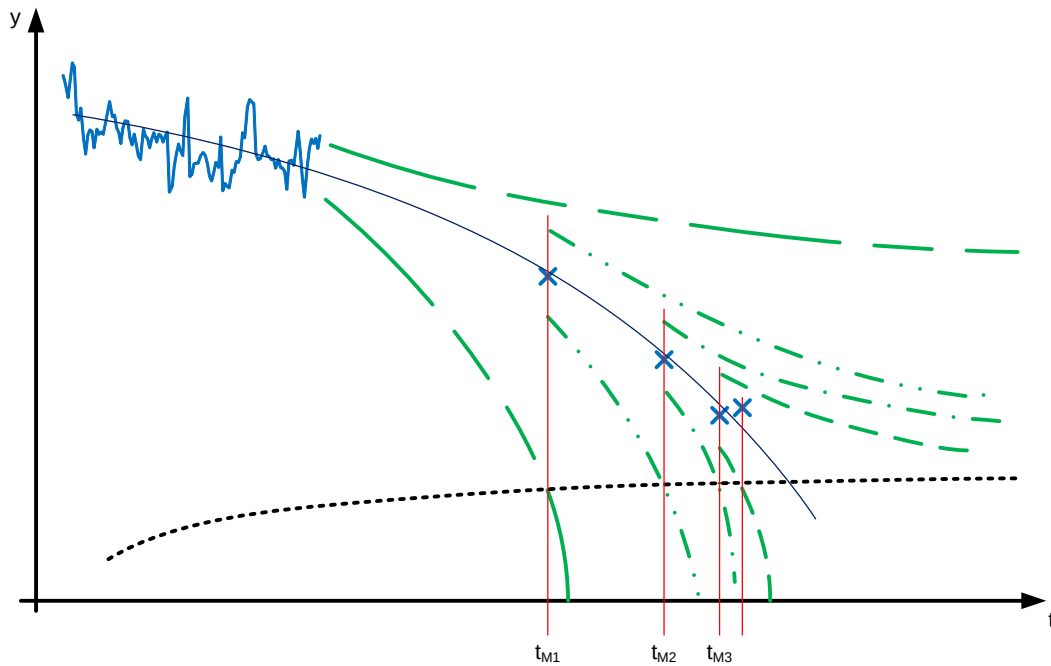
A dekomponálás után identifikáljuk a valós folyamatra legjobban illeszkedő sztochasztikus folyamatot, majd meghatározzuk a paramétereit. A validálás után pedig, ha megfelelően írja le a modell a folyamatot, előrejelzésre használhatjuk a modellt. A modell a korábbi értékek alapján következtet a következőkre, ezért minél távolabbra próbálunk előrejelezni, annál nagyobb lesz a bizonytalanság.



14. ábra: Az előrejelzés bizonytalansága nő az előrejelzés időtávjával

Szimulációval meghatározhatjuk vagy kiszámíthatjuk legkisebb kockázattal járó beavatkozási határt, ami az idő előrehaladtával változik. Kezdetben a mérési bizonytalanságból adódó másodfajú hiba kockázata kicsi, hiszen a vizsgált karakterisztika messze esik a tényleges meghibásodást okozó határértéktől, de az kopás miatt az idő előrehaladtával növekszik. Mivel a másodfajú hiba vesztesége nagyobb, mint az elsőfajú hiba vesztesége, (hiszen csak ekkor érdemes preventív karbantartást alkalmazni,) ez a növekedés gyorsabb lesz mint az első fajú hiba kockázatának növekedése. Ezért a minimális összes kockázat görbéje növekedni fog (14. ábra).

Ahol az előrejelzés konfidencia intervalluma metszi a minimális kockázat görbét (t_{M1}), ott kell elvégezni a következő mérést. Addig a pontig adott megbízhatóság mellett nem fog meghibásodni a berendezés. Az új mérési eredmény birtokában újra elvégezzük a dekomponálást, identifikálást és paraméterbecslést, majd ismét előrejelzünk. Addig folytatjuk ezt az iterációt (t_{M2} , t_{M3}), amíg az előrejelzés konfidencia intervalluma és a trend körüli konfidencia intervallum elhanyagolható távolságban metszik a minimális kockázat görbét. Ebben a pontban már nem mérni, hanem karbantartani kell.



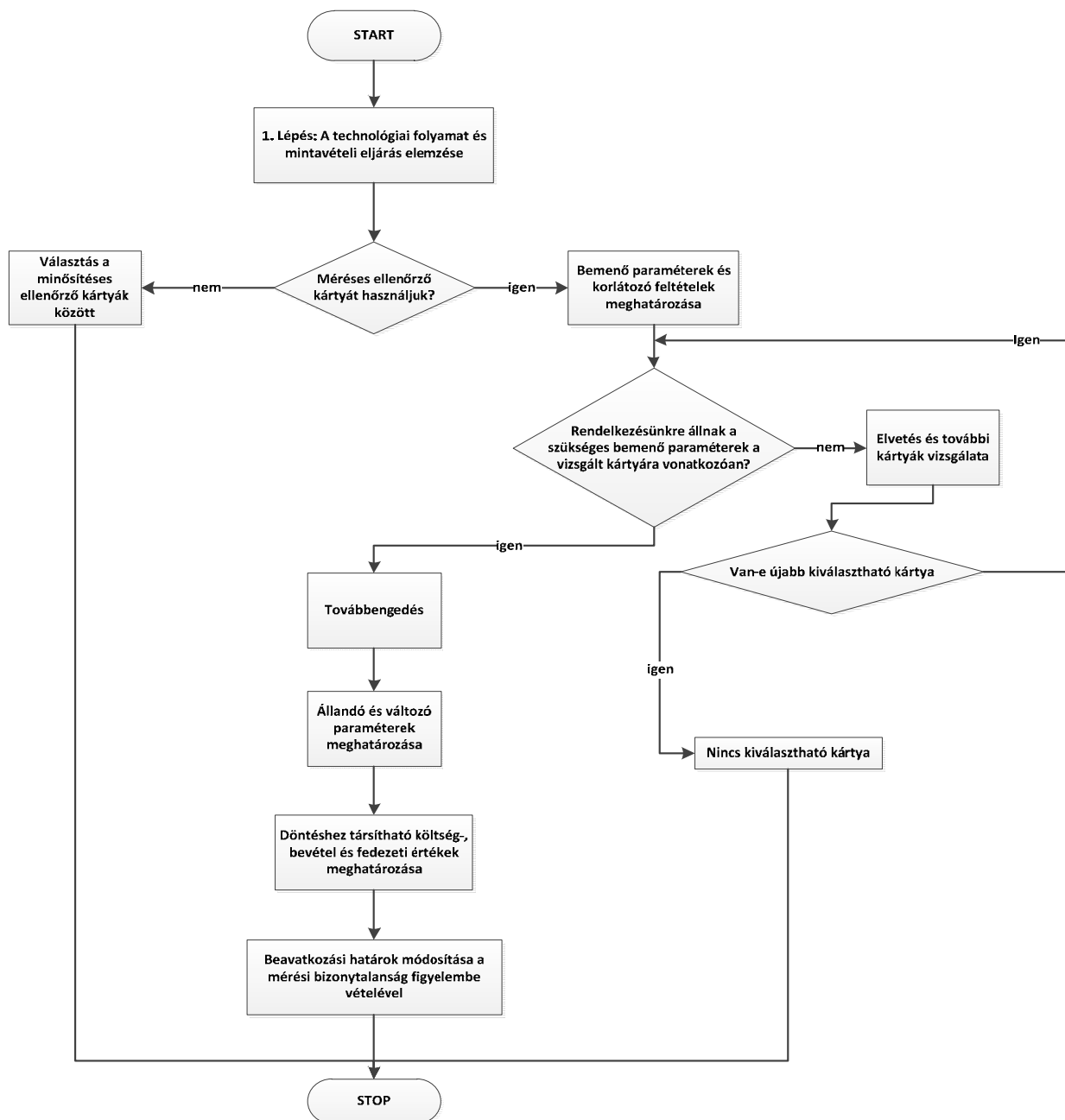
15. ábra: Az előrejelzés konfidencia intervallumának és a minimális kockázat görbéjének metszete határozza meg a mérések időpontját

4. Kártyaillesztés lépései stacioner, termelési folyamatokra

Termelési folyamatoknál legtöbbször feltételezhetjük, hogy a folyamatban nincs trend másképpen fogalmazva, a várható érték állandó. Feltételezzük továbbá, hogy a folyamat szórása és autokorrelációja is állandó. Ha ez nem teljesülne, akkor be kell avatkoznunk a folyamatba.

A kártya kiválasztását az alábbi 6 lépés írja le [13] (lásd: 16. ábra):

1. A technológiai folyamat és az ellenőrzés tulajdonságainak összegyűjtése
2. bemenő paraméterek és korlátozó tényezők meghatározása az egyes kártyák esetében
3. mérési vagy minősítési ellenőrző kártyák közötti választás, az eddigi információk figyelembe vételével a feltételeknek eleget tevő kártya (kártyák) kiválasztása
4. az állandó és változó paraméterek kiválasztása
5. a döntéshez társítható költség-, bevétel, és fedezeti értékek meghatározása
6. beavatkozási határok módosítása a mérési bizonytalanság figyelembe vételével.



16. ábra: A kártyaillesztési folyamat menete

A következőkben részletesen bemutatjuk a kártyaillesztés folyamatának egyes lépéseit.

4.1. 1. Lépés: A technológiai folyamat és az ellenőrzés tulajdonságainak összegyűjtése

A kártya illesztéséhez először az adott technológiai folyamatot, és az ellenőrzési módot kell elemezni. Ez a lépés nagyon fontos, mivel a következő lépések is erre épülnek, és a későbbi döntések alapjául szolgálnak az itt kinyert információk. Az első lépésben az alábbi kérdésekre keressük a választ:

Folyamatra vonatkozó kérdések:

- Mekkora a tervezett gyártási volumen?

- Mi a vizsgált technológiai folyamat célja?
- Milyen technológiai lépésekből áll a folyamat?
- Melyek a specifikációs határok? (LSL, USL)
- Mennyi a vizsgált termék minőségjellemzőjének célértéke?
- A kismértékű eltolódás jelentős következményekkel jár-e mind gazdasági, mind egészségügyi szempontból?¹

A mintavételre és ellenőrzésre vonatkozó kérdések:

- Az ellenőrzés milyen módon megy végbe?
- Roncsolásos-e a vizsgálat?
- Mindendarabos, vagy adott mintaelemszámmal történik az ellenőrzés?
- Függetlenek-e a minták egymástól?
- A mintavételezés költsége alacsonynak, vagy magasnak ítéltető meg?
- Milyen elv alapján sorolhatók csoportba a minták?

Ha a felsorolt kérdésekre választ kapunk, akkor elegendő információval rendelkezünk ahhoz, hogy a 3. lépést megtegyük, vagyis eldöntsük azt, hogy méréses, vagy minősítéses ellenőrző kártyát alkalmazzunk.

4.2. 2. Lépés: bemenő paraméterek és korlátozó tényezők meghatározása az egyes kártyák esetében

A következő lépés a bemenő paraméterek és alkalmazhatóságot korlátozó tényezők meghatározása. Ezt sorra mindegyik kártyánál meg kell határoznunk, majd megállapítani, hogy melyek azok a kártyák, amelyek esetében meghatározhatóak a szükséges bemenő adatok és nincsenek alkalmazhatóságot korlátozó tényezők. Itt azonban meg kell jegyeznünk, hogy a mért adatok valószínűségi eloszlásvizsgálata nagy jelentőséggel bír. A bemenő paraméterek vizsgálatához tudnunk kell, hogy a mért értékek milyen valószínűségi eloszlást követnek, ugyanis, ha a normalitás nem teljesül, akkor az a méréses ellenőrző kártyák közül transzformáció nélkül a mozgóátlag-, és az exponenciálisan súlyozott mozgóátlag, illetve a CUSUM-kártya alkalmazható, mert a centrális határeloszlás tételének megfelelően a mozgóátlagolt értékek akkor is normális eloszlást követnek, ha az eredeti mért értékek attól eltérő eloszlásból származnak.

4.3. 3. Lépés: méréses és minősítéses ellenőrző kártyák közötti döntés, az eddigi információk figyelembevételével a megfelelő kártya (kártyák) kiválasztása

Itt elsősorban azt kell megvizsgálnunk, hogy az adott terméket mért adatokkal tudjuk-e jellemezni. Ha a technológiai folyamat vizsgálatakor lehetőségünk nyílik pontos mérések elvégzésére, hogy a termék vizsgált minőségjellemzőit konkrét, mért adatokkal jellemezhessük, tehát nem csak azt tudjuk megmondani, hogy a termék megfelel-e a minőségi előírásoknak vagy sem, hanem azt is, hogy pontosan mennyivel tér el a jellemző értéke a kívánt célértéktől, akkor

¹ Az egészségügyi következmény alatt azt értjük, hogy a gyártott termék veszélyessé válik-e, ha a vizsgált minőségjellemzőjének értéke kis mértékben eltolódik.

mérési ellenőrző kártyát célszerű alkalmazni. Ha valamely okból a termékjellemzők értékének mérése nehézségekbe ütközik, akkor a minősítési ellenőrző kártyák alkalmazása indokolt.

Ha minden kártyát megvizsgáltunk a szükséges bemenő paraméterek és alkalmazhatóságot befolyásoló tényezők szempontjából, ki kell választanunk a lehetséges alternatívákat. Így tovább szűkül a szóba jöhető ellenőrző kártyák száma. Célszerű megtervezni a fennmaradó kártyákat a rendelkezésre álló mérési adatok felhasználásával. Így képet kaphatunk arról, hogy az egyes kártyák mennyire illeszkednek a figyelemmel kísért technológiai folyamathoz.

4.4. 4. Lépés: Állandó és változó paraméterek megválasztása

Ötödik lépésként határozzuk meg, hogy a használt kártya, mely paraméterei legyenek állandóak, és melyek változóak. Ily módon változtathatjuk a mintavételi időközt (b), a mintaelemszámot (n), és a beavatkozási határokat (k). Így a kártyákat különböző hierarchia szintekre sorolhatjuk be aszerint, hogy a három paraméter közül mindegyik állandó (FP), egy (VSI, VSL, VSS), kettő (VSSI, VSSL, VSIL) illetve az összes paraméter változik (VP).

Az egyes kártyák teljesítményét mérhetjük oly módon, hogy meghatározzuk azt az időintervallumot, amely a folyamat „nem stabil állapotba” kerülésétől egészen a riasztásig terjed (AATS, angolul: adjusted average time to signal). M. De Magalhaes, A. Costa és F. Moura Neto kutatási alapján az átlag kártyára igaz az alábbi összefüggés.

$AATS_{FP} > AATS_{VSI} > AATS_{VSSI} > AATS_{VP}$ ha $0 < \delta \leq 1$, ahol δ paraméter jelöli az értékek eltolódásának nagyságát [14].

Ez alapján azt mondhatjuk, hogy ha $0 < \delta \leq 1$, akkor a változó paraméterű kártya reagál leggyorsabban a szisztematikus hatásokra. Ezen kívül azért is lehet célszerűbb változó paraméterekkel dolgozni, mert a későbbiek során, ha valamely paramétert állandóként szeretnénk kezelni, akkor csak rögzítenünk kell. Fordított esetben azonban nehezebben tudnánk csak eljárni.

4.5. 5. Lépés: a döntéshez társítható költség-, bevétel, és fedezeti értékek meghatározása

A kártyaillesztési folyamatban számolunk annak a kockázatával is, hogy az általunk mért értékek eltérnek a valós értékektől. Ahhoz, hogy a későbbiekben a mérési bizonytalanságot figyelembe vehessük a kártya beavatkozási határainak számításakor, először is ismernünk kell a kockázat nagyságát. Ezt pedig az adott döntéshez társítható költségvonzattal fejezhetjük ki. Ha ismerjük az egyes döntésekhez társítható költségvonzatot, akkor azt is kalkulálhatjuk, hogy a mérési bizonytalanság az első-, és másodfajú hiba elkövetésének valószínűségét mennyiben befolyásolja, vagyis a rossz döntés a termék továbbengedésekor, illetve visszatartásakor mekkora költséget is jelent számunkra.

4.6. 6. Lépés: A beavatkozási határok módosítása a mérési bizonytalanság figyelembevételével

Ahogy azt az előző. fejezetben láthattuk, a gyakorlatban nem mindig valósul meg az egyes mérési jellemzők állandósága egy adott termékre vonatkoztatva, mert a mérési eredményre számos

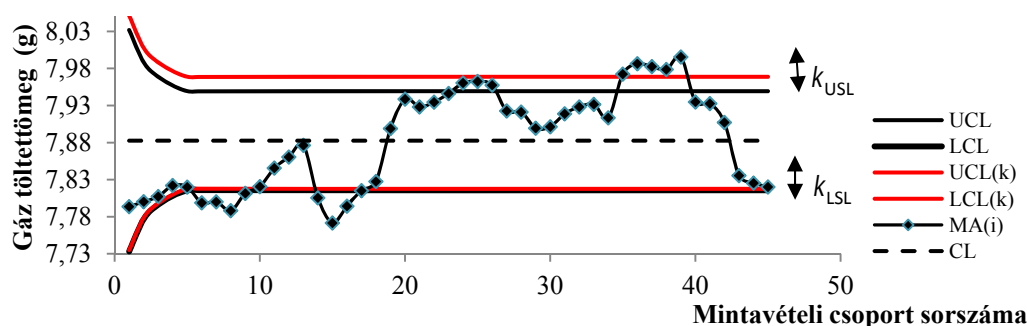
tényező van hatással. Ezért azt mondhatjuk, hogy az általunk mért érték a tényleges értéknek és a mérési hibának az összege.

Az előző lépésben meghatároztuk a döntéshez társítható profitot. Ha minden hibatípushoz társítjuk a hozzá tartozó fedezeti (vagy profit) értéket, akkor a kapott értékeket összegezve a vizsgált folyamatra vonatkozóan a teljes fedezeti értéket kapjuk. Célunk a vizsgált folyamatra vonatkozóan az összegzett fedezeti érték maximalizálása. Szimulációs módszerekkel úgy optimalizáljuk k_{LSL} és k_{USL} értékét, hogy az összegzett fedezeti érték maximális legyen. Ha k_{LSL} és k_{USL} értékét növeljük, akkor szűkül az intervallum, amelyen belül megfelelőnek ítélik meg a terméket.

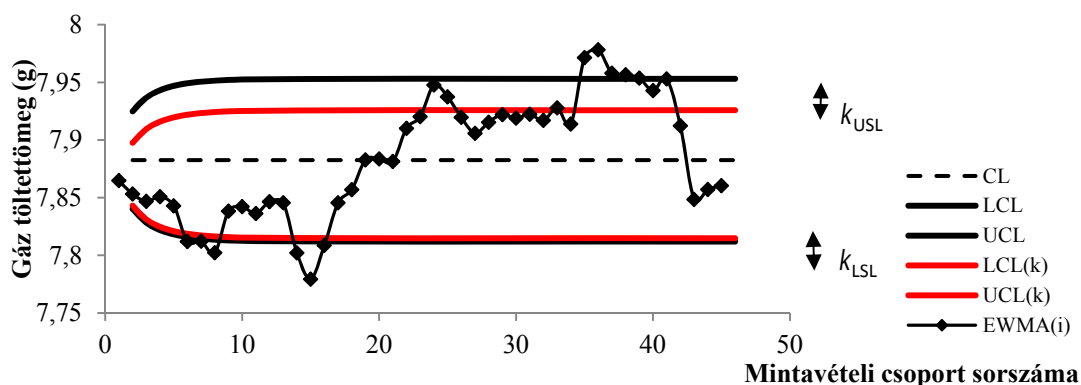
4.7. Esetpélda – patronhüvely gyártása

A vizsgált technológiai lépés célja, hogy a már legyártott, acéllemezből kialakított patronhüvelybe 8 grammnyi gázt töltsünk. A vállalat többféle gázt alkalmaz a töltésre. A betöltött gázmennyiség 0,40 g értékkel térhet el a célértéktől mindkét irányban (USL; LSL).

Az alábbi ábrán látható a folyamatra tervezett Mozgóátlag,- és Exponenciálisan súlyozott mozgóátlag kártya. Az ábrán a piros vonalak jelölik a k_{USL} , illetve k_{LSL} paraméterek optimalizálásával számított módosított beavatkozási határokat.



17. ábra: A folyamatra tervezett Mozgóátlag-kártya



18. ábra: A folyamatra tervezett Exponenciálisan súlyozott mozgóátlag kártya

A következő fejezetben olyan feladatokkal foglalkozunk, ahol az állandó trend feltételezése nem tartható. Ilyen problémák közé tartoznak a karbantartási folyamatok, ahol pl. rezgésdiagnosztikában egy kopásvizsgálat esetén nem arról döntünk, hogy beavatkozunk-e a

termelési folyamatba, hanem arról, hogy az adott berendezést, vagy annak egy egységét cseréljük, vagy karbantartsuk-e.

A karbantartás során egyszerre több jellemzőt is vizsgálunk, így itt olyan kártyákat kell tekintenünk, ahol lehetőség van egyszerre több jellemző egyidejű vizsgálatára is.

5. Kártyaillesztés karbantartási folyamatokra

A gyakorlatban a preventív karbantartást és a folyamatszabályozást a legtöbb esetben elkülönítik egymástól. E két terület esetén különböző szempontok alapján gyűjtene adatokat a vizsgált folyamatra vonatkozóan. Míg egyik esetben a kigyűjtött adatok elsősorban a gép állapotára vonatkoznak, addig a másik esetben arra kíváncsiak, hogy a detektált eltolódás szisztematikus hatás vagy pedig a véletlen ingadozás eredménye. Azonban mindegyik területen az egyéni optimumra törekednek a rendelkezésre álló információk és célfüggvény alapján.

A karbantartás, illetve a folyamatszabályozás együttes kezelésére több megoldás is született, amely során egy szabályozó kártyát alakítottak át. A gyakorlatban alkalmazott szabályozókártyák azonban nem számolnak a mérések bizonytalanságával. Állapotfüggő karbantartási stratégia esetén azonban a teljesítőképesség és a gépre ható terhelés mérésekor fellépő mérési hiba egyaránt ingadozik. Ezek az ingadozások döntési hibákat okoznak, melyek többletköltséget jelentenek a vállalat számára. A többletköltség csökkenthető, ha a szabályozókártya tervezésekor figyelembe vesszük a mérések bizonytalanságát.

5.1. Több jellemző egyidejű vizsgálata

Tegyük fel, hogy a szabályozni kívánt folyamat során a vizsgált termék megfelelőségét két minőségjellemző határozza meg. Legyenek ezek X_1 és X_2 ! Ha a változóink mért értékeit egy kártyán szeretnénk ábrázolni, akkor célszerű standardizálnunk a mért értékeket, így összehasonlíthatóvá válnak a különböző mértékegységekkel rendelkező változók. Így a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{(X_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} = SD^2 \quad (15)$$

Ahol X_1 , X_2 az egyes és a kettes változónk mért értékei, μ_1 , μ_2 az egyes változók várható értékei σ_1^2 és σ_2^2 az egyes változók varianciái. A fenti egyenlet egy olyan ellipszis egyenlete, amelyen belül az összes pont statisztikai távolsága (a (μ_1, μ_2) középponttól számítva) kisebb, mint SD értéke. Vektorokkal a következő formában adható meg az összefüggés:

$$(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) = SD^2 \quad (16)$$

A fenti összefüggést felhasználva a Hotelling-féle T^2 statisztika a következőképpen írható fel:

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu)' S^{-1} (\bar{X} - \mu) \quad (17)$$

Az egyenletben n jelöli a minta elemszámot, S^{-1} pedig a becsült kovarianciamátrix inverzét. A statisztika a T^2 eloszlást követi, ami kifejezhető az F-eloszlás transzformáltjaként:

$$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{n-p} F(p, n-p) \quad (18)$$

Ahol p a változók számát jelöli, $F(p, n-p)$ pedig a p és $n-p$ szabadságfokú F-eloszlást. Az eloszlás ismeretében, az elsőfajú hiba (α) valószínűségének rögzítésével megadható a T^2 -re vonatkozó kritikus érték, így megadható az a határérték (UCL_{T^2}) ami felett már beavatkozunk a folyamatba.

Mért adatok birtokában először megtervezhetjük a megbízhatóság alapon működő T^2 kártyát. Ehhez először meg kell bizonyosodnunk arról, hogy a vizsgált változók p -dimenziós normális eloszlást követnek, hiszen ez a T^2 kártya alkalmazhatósági feltétele. A mért adatokból elsőként kiszámítjuk a T^2 értékeket a 17-es számú egyenlet alapján, majd emellett az alábbi képlettel megadjuk a beavatkozási határ értékét:

$$UCL_{T^2} = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F(p, m(n-1) - p + 1) \quad (19)$$

Ahol p a változók száma, m a teljes minta sokasága, n a minta elemszám, $F(p, m(n-1)-p+1)$ pedig a p és $m(n-1)-p+1$ szabadságú F-eloszlást jelöli.

A folyamat megfigyelésekor ciklikusság figyelhető meg az ábrázolt értékek tekintetében. Ennek oka a gép kopása, hiszen a kopás következtében trendhatás figyelhető meg. Ha a mért értékek elérnek egy bizonyos értéket, akkor javítás miatt újra megfelelő értékeket mérünk.

A T^2 kártya hiányosságai

E szabályozó kártya hatékonyan alkalmazható több változó egyidejűleg történő vizsgálatára, azonban a mérések bizonytalanságából eredő kockázatokkal nem számol. További hiányosság, hogy amint azt a fentiekben is láthattuk, a beavatkozási határok számításakor nem találkoznak olyan paraméterrel, amely a mért értékekre vonatkozna (sem szórás sem várható érték). Ebből adódóan a beavatkozási határ a kovarianciamátrix megváltozására sem reagál. Az alkalmazás során feltétele, hogy a változók több dimenziós normál eloszlást kövessenek. Ez a feltétel a gyakorlat során sok esetben nem teljesül, így a kártya alkalmazhatósága korlátozódik. Így célszerű lehet a beavatkozási határ számításakor analitikus módszer helyett szimulációs módszerekre hagyatkozni. A kockázatalapú T^2 kártya beavatkozási határának meghatározását Monte Carlo szimuláció segítségével fogjuk elvégezni.

Az egyes döntéstípusokhoz társítható fedezeti értékek meghatározása

Egy termék vizsgálatakor a döntésünk helyességét (selejtnek minősül-e a termék vagy sem?) az határozza meg, hogy a tényleges és a mért megfeleléség valójában megegyezik-e.

A szabályozó kártya beavatkozási határának értékét úgy fogjuk megválasztani, hogy amellett minimális legyen a döntésekre vonatkoztatott összegzett költség.

A mátrixot összeállítva, a döntésekhez társított költségértékeket kiszámítva már elegendő információ áll rendelkezésünkre ahhoz, hogy a mérési bizonytalanság figyelembevételével kockázatalapú szabályozó kártyát tervezzünk. Ezt a következő lépésben ismertetjük.

Beavatkozási határok módosítása a mérési bizonytalanság figyelembe vételével

Ha a mért értékeket mérési intervallumokkal helyettesítjük, akkor az adott intervallum hosszát úgy kapjuk meg, hogy a mérőműszer kalibrálásakor megállapított szórást szorozzuk egy k konstanssal. A k konstans értéke szimulációs módszerek segítségével meghatározható. Ha ismerjük a használt

mérőműszer mérési bizonytalanságát, eloszlását, valamint a mérési hiba várható értékét, akkor, ha a mérési pontokat mérési intervallumokkal helyettesítjük, a következő relációt állíthatjuk fel a beavatkozási határookra vonatkozóan:

Megfelelő beavatkozás esetén:

$$[y(t) + k_{UCL} \cdot u] < UCL \text{ és } [y(t) - k_{LCL} \cdot u] > LCL, k_{UCL}, k_{LCL} \in \mathbf{R} \quad (21)$$

Nem megfelelő beavatkozás esetén:

$$[y(t) + k_{UCL} \cdot u] \geq UCL \text{ vagy } [y(t) - k_{LCL} \cdot u] \leq LCL, k_{UCL}, k_{LCL} \in \mathbf{R} \quad (22)$$

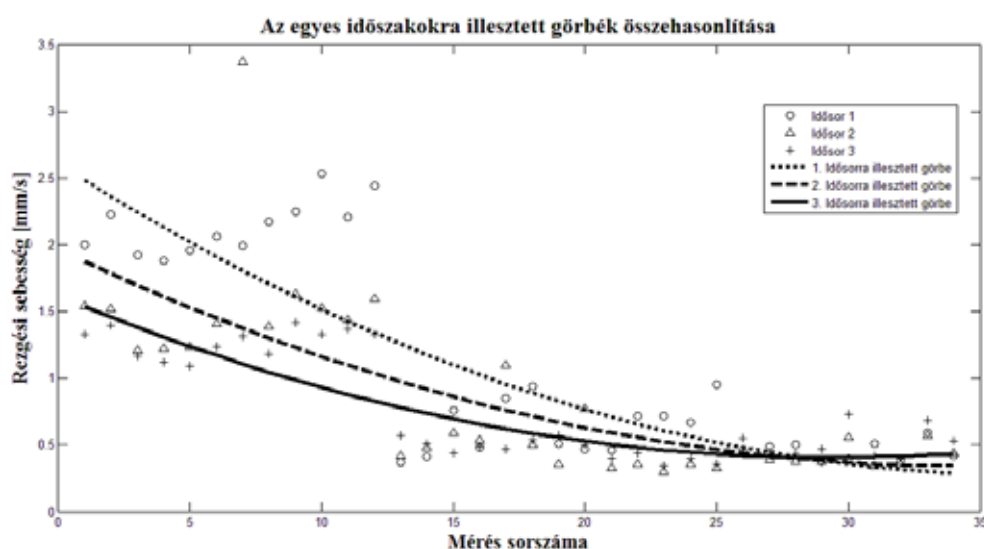
A beavatkozási határok módosítása szimulációs módszerekkel történik. A k paraméter segítségével tudjuk a beavatkozási határ értékét változtatni. A k^* paraméter értékének azt az értéket választjuk, amely mellett az összegzett költségérték minimális. Példaként tekintsünk egy rezgésdiagnosztikai feladatot.

5.2. Trendhatás kiszűrésének bemutatása egy vállalati példán keresztül

A bemutatott módszer alkalmazása során a rezgések sebességét mérjük három dimenzióban. Így mindegyik irányra vonatkozóan egy-egy értékkel számolunk. A folyamatba három esetben avatkozunk be:

1. Az idősorra illeszthető függvény paraméterei eltérnek a korábban meghatározottól (újraszámolás is szükséges ekkor).
2. A rezgése sebesség értéke elér egy kritikus értéket.
3. A trendhatástól megfosztott értékek a szabályozó kártya beavatkozási határán kívülre kerülnek.

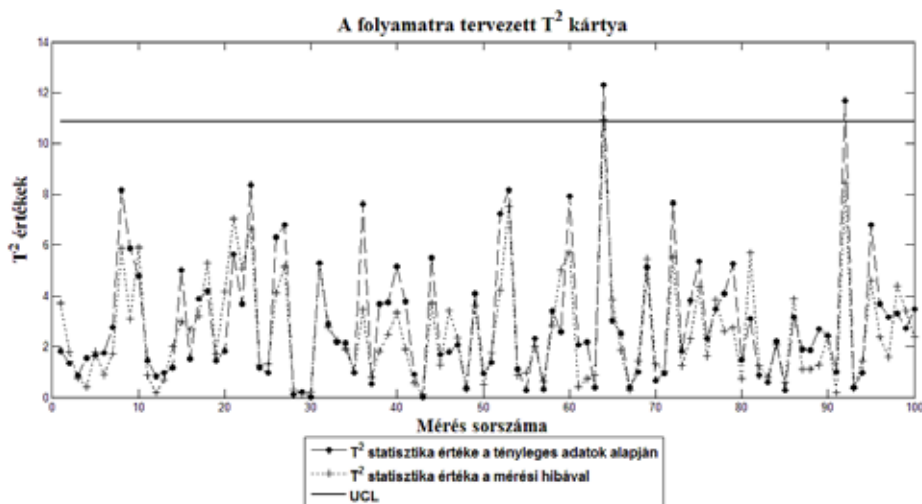
A karbantartási területre alkalmazott T^2 kártya ábrázolt értékei három dimenzióváltozóból számíthatók. Első körben az előzetes adatfelvétel során meg kell tudnunk, hogy milyen trendet követ a mért értékek eltolódása. A mért adatokra a következő függvényt illesztettük ennek vizsgálata során.



19. ábra: Az egyes időszakokra illesztett görbék összehasonlítása

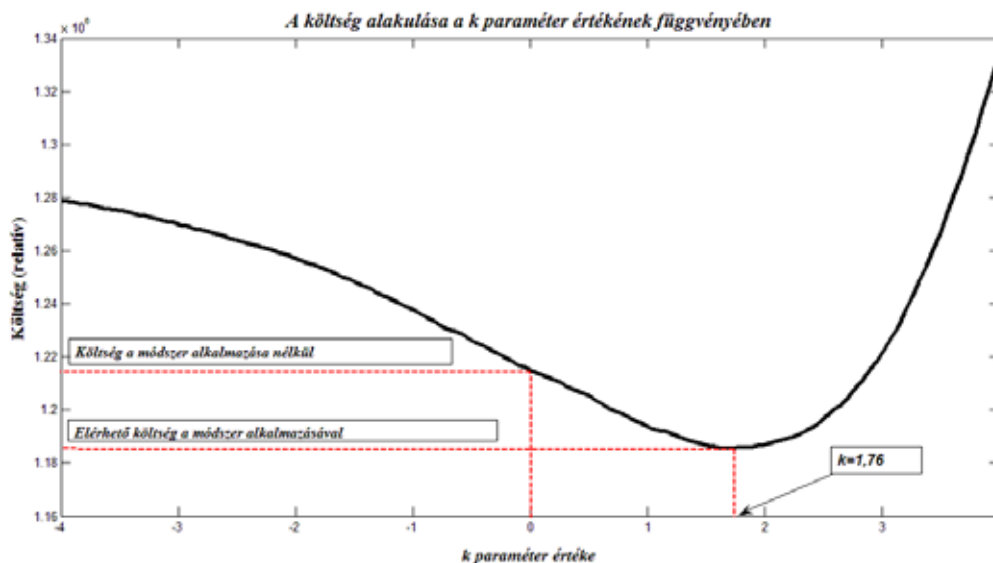
A függvényillesztés során nem csak azt kell megvizsgálnunk, hogy melyek a pontos paraméterei az idősor értékeire illesztett függvénynek, hanem az is egy nagyon lényeges szempont, hogy időben egymást követő idősorok esetén megváltoznak-e az idősorra illesztett függvény paraméterei. Ennek felülvizsgálata azért lényeges, mert a feltételezett trend megváltozása esetén korábbi számításaink már nem állnák meg a helyüket a jelenleg időpontra vonatkozóan. A trend megváltozása pedig egy újabb beavatkozási lehetőséget ad a folyamatba. A fenti ábrán látható, hogy a csökkenő trend ugyan mindegyik esetben fennáll, a görbék meredeksége azonban változik. Ezért a paramétereket célszerű az alkalmazás során meghatározott időközönként újraszámolni.

Az idősorra illesztett függvény paramétereinek meghatározása után szimuláció segítségével megterveztük megbízhatóság alapú T^2 kártyát, melyet a következő ábra mutat be:



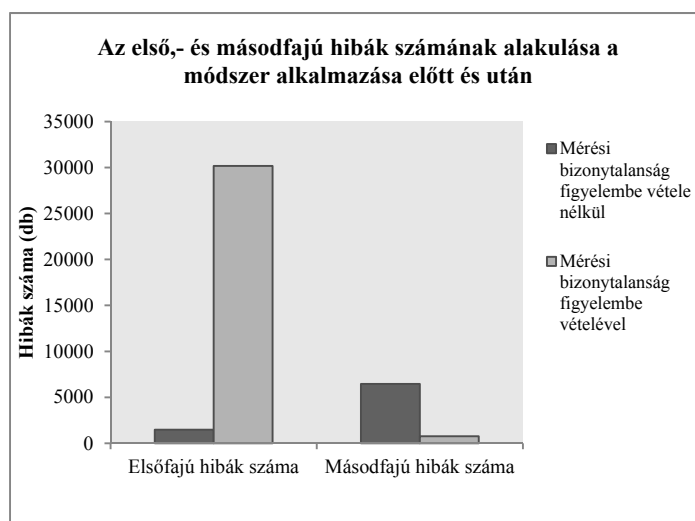
20. ábra: A folyamatra tervezett T^2 kártya

A fenti ábrán a pontok jelölik a tényleges, a keresztet „+” pedig a mérési hibát tartalmazó adatokból számított T^2 statisztika értékeit. Az egyes döntésekhez társított költség tekintetében relatív értékekkel számoltunk. A helyes elfogadás költségét rögzítettük egynek. Ehhez képest ötszörös költség társul a helyes visszautasításhoz, tízszeres az elsőfajú hiba elkövetéséhez és húszszoros költség pedig a másodfajú hiba elkövetéséhez. Ezen relatív költségek felhasználásával és a megadott adatok segítségével 1 000 000 mintavételt szimulálva végeztük el a szimulációt, melynek során a T^2 kártya beavatkozási határait módosítottuk a mérések bizonytalanságának figyelembe vételével. A kapott eredményeket grafikusán szemlélteti az alábbi ábra:



21. ábra: A költség alakulása a k paraméter függvényében

A fenti ábra az elérhető összegzett döntési költséget mutatja a k paraméter függvényében. Láthatjuk, hogy alacsonyabb költség érhető el abban az esetben, ha módosítjuk a beavatkozási határokat. Ezt úgy érhetjük el, hogy a szimuláció során úgy adjuk meg k értékét, hogy amellet minimális legyen a döntésekhez társított összes költség. A módszer alkalmazásával 2,44%-os költségcsökkenés volt elérhető. A k paraméter optimális értéke pedig ekkor 1,76. A módszer alkalmazásával csökkenthető az elkövetett másodfajú hibák száma. Ezt mutatja be az alábbi ábra.



22. ábra: Az első- és másodfajú hibák számának alakulása a módszer alkalmazása során

Láthatjuk, hogy a módszer alkalmazásával megnövekszik az elkövetett elsőfajú hibák száma, ugyanakkor lecsökken a másodfajú hibák száma. Ennek oka a következő: A módszer alkalmazása során úgy módosítjuk a beavatkozási határt, hogy minimálisra csökkentjük az elkövetett másodfajú hibák számát. Ez azonban maga után vonja annak lehetőségét is, hogy így többször követünk el elsőfajú hibát. Mivel az elsőfajú hiba költségvonzata jóval kisebb, mint a másodfajú hiba esetén, ezért még így is költségcsökkenést tapasztalhatunk.

6. Összefoglalás

A szabályozó kártyák egyidejűleg alkalmazhatók a preventív karbantartásban és a folyamatszabályozásban is. A segédletben olyan kártyatervezési módszert mutattunk be, amely segítségével kockázatalapú többváltozós szabályozó kártya tervezhető. A módszer alkalmazhatóságát gyakorlati példákon keresztül követhettük. A k paraméter optimális megválasztásával 2-7%-os költségcsökkenést értünk el az összes mintavételre számított döntési költség tekintetében.

7. Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

8. Felhasznált irodalom

-
- [1] Leslie M. Galicinski. (1999). The SPC Book, Qualitran Professional Services Inc., ISBN-10: 0969678622,
 - [2] International Organization for Standardization (ISO), Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, International Organization for Standardization (ISO), Geneva, Switzerland, 1993 (corrected and reprinted 1995).
 - [3] JCGM 100:2008 - Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement.
 - [4] Feigenbaum A. V. (1991): Teljes körű minőségyszabályozás. 3. kiadás, Budapest, ExQualitas Libri Kft., oldalszám: 68-72, 118. ISBN: 963-02-6564-8
 - [5] Parányi, Gy. (2001): Minőséget gazdaságosan, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, oldalszám: 280-284. ISBN 963 16 3033 1
 - [6] Dadi He. (2010): Engineering Quality Systems: Cost of Quality. Modern Applied Science, Vol.4. Issue5, pp.102-104, ISSN: 1913-1852
 - [7] Jordan W. (2006). Measurement, test and calibration: industrial tasks with respect to DIN EN ISO/IEC 17025 and general quality management
 - [8] Kemény, S, Papp, L., Deák, A. (1999). Statisztikai minőség- (megfelelőség-) szabályozás. Műszaki könyvkiadó, Budapest
 - [9] Gaál, Z. (2001). Általános Menedzsment. Veszprémi Egyetemi Kiadó, Veszprém
 - [10] Hegedűs Csaba (2014). Kockázat-alapú döntések támogatása a megfelelés értékékelésében a mérési bizonytalanság figyelembe vételével. PhD értekezés. 2014.
 - [11] Åkesson, B.M. and Toivonen, H.T. (2006): State-dependent parameter modelling and identification of stochastic non-linear sampled-data systems. Journal of Process Control, pp. 877–886
 - [12] Chen Z., Lu S., Lam S. (2007): A hybrid system for SPC concurrent pattern recognition. Advanced Engineering Informatics 21 (2007) 303–310
 - [13] Kosztyán Zs., Katona A. Hegedűs Cs. (2014). Új Kockázatalapú szabályozó kártyák tervezése, kiválasztása és folyamathoz illesztése (megjelenés alatt).
 - [14] Magalhaes M. De, Costa A., Moura N. F., (2009): A hierarchy of adaptive X control charts, Vol. 119, Issue 2, pp. 271-283, DOI: 10.1016/j.ijpe.2008.10.017